7 Matice. Determinant Soustavy lineárních rovnic

7.1 Matice

Definice 1. *Matice typu* (m, n) je soustava $m \times n$ reálných čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Čísla a_{ik}, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, se nazývají *prvky matice.*

Poznámka 1. Matici obvykle označujeme jedním písmenem, např. **A**. Chceme-li označit i její prvky, píšeme

$$\mathbf{A} = (a_{ik})_{i=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}.$$

Definice 2. Má-li matice jediný řádek a n sloupců, mluvíme o (n-rozměrném) *řádkovém vektoru*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Má-li matice jediný sloupec a m řádků, mluvíme o (m-rozměrném) *sloupcovém vektoru*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m, \end{pmatrix}.$$

Matice typu (n, n) (o stejném počtu řádků i sloupců) se nazývá *čtvercová matice řádu n*

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definice 3. *Hlavní diagonálou* matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) je p-tice čísel a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{pp}$, kde $p = \min\{m, n\}$. Je-li **A** čtvercová matice řádu n, je její hlavní diagonálou n-tice čísel $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

7.1.1 Nulová a jednotková matice

Nulová matice libovolného typu (m, n) je matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule; značíme ji $\mathbf{O}$.

Jednotková matice je *čtvercová* matice, která má prvky hlavní diagonály rovny jedné a ostatní prvky rovny nule; značíme ji $\mathbf{I}$. Např.

$$(1), \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

jsou jednotkové matice 1., 2. a 3. řádu.

7.1.2 Sčítání a násobení reálným číslem

Jsou-li $\mathbf{A} = (a_{ik})$, $\mathbf{B} = (b_{ik})$ matice stejného typu (m, n), pak jejich *součtem* je matice $\mathbf{C} = (c_{ik})$ typu (m, n) (zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$), pro jejíž prvky platí

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \ k = 1, \ldots, n. \tag{7.1}$$

Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak α-násobkem matice $\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{D} = (d_{ik})$ typu (m, n) (zapisujeme $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{A}$), pro jejíž prvky platí

$$d_{ik} = \alpha a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \ k = 1, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Ukázka 1.

$$\begin{pmatrix} 5, & 1, & -1 \\ 2, & 0, & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 3, & -1 \\ -1, & 2, & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6, & 4, & -2 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5, & 1, & -1 \\ 2, & 0, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15, & 3, & -3 \\ 6, & 0, & 12 \end{pmatrix}$$

Věta 1. *Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou matice stejného typu (m, n) a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak pro jejich sčítání a násobení reálným číslem platí*

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$;
4. *K maticím $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ existuje právě jedna matice $\mathbf{X}$ typu (m, n) taková, že platí $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Zapisujeme $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$.*
5. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$; $\quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$.

Důsledek 1. *Množina všech matic typu (m, n) s operacemi (7.1) a (7.2) tvoří vektorový prostor dimenze mn.*

7.1.3 Násobení matic

Je-li matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, p) a matice $\mathbf{B} = (b_{jk})$ typu (p, n), pak *součinem* $\mathbf{AB}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ *v tomto pořadí* je matice $\mathbf{C} = (c_{ik})$ typu (m, n), pro jejíž prvky platí

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}, \quad i = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, n. \tag{7.3}$$

Lze tedy násobit jen takové dvě matice, z nichž první má stejný počet sloupců jako druhá řádků.

Ukázka 2. Násobíme „řádek krát sloupec“, tj. prvek a_{ik} součinu je i-tý řádek krát k-tý sloupec:

$$\begin{pmatrix} 5, & 1, & -1 \\ 2, & 0, & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ -1, & 2 \\ 2, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 15 \\ 10, & 14 \end{pmatrix}$$

Věta 2. *Pro násobení matic platí*

1. $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$, *lze-li násobit matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *i matice* $\mathbf{B}$ *a* $\mathbf{C}$ *(v tomto pořadí);*
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, *lze-li matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sečíst a matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{C}$ *násobit (v tomto pořadí);*
3. $\mathbf{C}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$, *lze-li matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sečíst a matice* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{A}$ *násobit (v tomto pořadí);*
4. $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$, $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$, *lze-li tyto matice násobit.*
5. $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$, *lze-li tyto matice násobit.*

Poznámka 2. Pro násobení matic *neplatí obecně komutativní zákon*, a to ani v případě čtvercových matic. Např.

$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ale} \quad \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

7.1.4 Hodnost matice

Vrátíme se nejprve k vektorovému prostoru $\mathbb{R}^n$, což je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel a definujeme hodnost soustavy vektorů z $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 3.

1) Soustava vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ prostoru $\mathbb{R}^n$ má hodnost r, jestliže mezi vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ existuje r lineárně nezávislých vektorů a každých $r + 1$ vektorů jsou už vektory lineárně závislé.
2) Hodnost libovolné soustavy vektorů z prostoru $\mathbb{R}^n$ není větší než n.

Věta 3. *Hodnost soustavy vektorů se nezmění, jestliže*

1. *zaměníme pořadí vektorů v soustavě;*
2. *vynásobíme libovolný vektor nenulovým číslem;*
3. *přičteme k libovolnému vektoru lineární kombinaci ostatních;*
4. *vynecháme vektor, který je lineární kombinací ostatních vektorů soustavy.*

Poznámka 4. Matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) můžeme považovat za m-rozměrný sloupcový vektor, jehož prvky jsou n-rozměrné řádkové vektory (nebo n sloupcových vektorů dimenze m), nebo za n-rozměrný řádkový vektor, jehož prvky jsou m-rozměrné sloupcové vektory (nebo m řádkových vektorů dimenze n).

Věta 4. *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ik})$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, *je matice typu* (m, n). *Potom hodnost* r *soustavy všech jejích* m *řádkových vektorů* $(a_{i1}, \ a_{i2}, \ \ldots, \ a_{in})$ *je rovna hodnosti všech jejích* n *sloupcových vektorů*

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk}, \end{pmatrix}.$$

Tato hodnost $r \leq \min\{m, n\}$.

Definice 4. Číslo r se nazývá *hodnost matice* $\mathbf{A}$ a značí se $h(\mathbf{A})$.

Poznámka 5. Každou matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, n), která má hodnost $h(A) = \min\{m, n\}$, můžeme úpravami řádkových a sloupcových vektorů podle věty 3 převést na tvar, kdy pod hlavní diagonálou jsou nuly a součin prvků na hlavní diagonále je různý od nuly. Hodnost takto upravené matice $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ik})$ je stejná jako hodnost matice $\mathbf{A}$. Např.

1) Matici $\mathbf{A}$ typu (4,3), $h(\mathbf{A}) = 3$ lze upravit na tvar

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11}, & \bar{a}_{12}, & \bar{a}_{13} \\ 0, & \bar{a}_{22}, & \bar{a}_{23} \\ 0, & 0, & \bar{a}_{33} \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33} \neq 0.$$

2) Matici $\mathbf{A}$ typu (3,4), $h(\mathbf{A}) = 3$ lze upravit na tvar

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11}, & \bar{a}_{12}, & \bar{a}_{13}, & \bar{a}_{14} \\ 0, & \bar{a}_{22}, & \bar{a}_{23}, & \bar{a}_{24} \\ 0, & 0, & \bar{a}_{33}, & \bar{a}_{34} \end{pmatrix}, \qquad \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33} \neq 0.$$

3) Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n se nazývá

diagonální, je-li $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $i, k = 1, \ldots, n$, např. diagonální matice 3. řádu je

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & 0 \\ 0, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33} \end{pmatrix},$$

dolní trojúhelníková, je-li $a_{ik} = 0$ pro $i < k$, $i, k = 1, \ldots, n$, např. dolní trojúhelníková matice 3. řádu je

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & 0 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix},$$

horní trojúhelníková, je-li $a_{ik} = 0$ pro $i > k$, $i, k = 1, \ldots, n$, např. horní trojúhelníková matice 3. řádu je

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ 0, & a_{22}, & a_{23} \\ 0, & 0, & a_{33} \end{pmatrix}.$$

7.1.5 Transponovaná matice

Definice 5. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ik})$ je matice typu (m, n), pak matice $\mathbf{A}^\mathsf{T} = (a_{ki})$ typu (n, m) se nazývá *transponovaná matice* k matici $\mathbf{A}$.

Poznámka 6. Transponovaná matice $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ k matici $\mathbf{A}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ výměnou řádků za sloupce, jde tedy o překlopení prvků kolem hlavní diagonály:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots, & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Věta 5. *Pro operaci transponování platí*

1. $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ *pro každou matici* $\mathbf{A}$*;*
2. $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ *pro každou matici* $\mathbf{A}$*;*
3. $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$*, lze-li matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *násobit.*

Poznámka 7. Označení transponované matice je vhodné používat zejména u sloupcových vektorů:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^{\mathsf{T}} .$$

7.2 Determinant matice

Definice 6. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ik})$ je čtvercová matice řádu n. *Determinant matice* $\mathbf{A}$ je číslo $\det \mathbf{A}$, pro které platí

1) pro $n = 1$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}$,
2) pro $n > 1$ označme $\mathbf{M}_{1k}$ matici, která vznikne vyškrtnutím 1. řádku a k-tého sloupce z matice $\mathbf{A}$ a definujeme

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det \mathbf{M}_{1k} .$$

$$\text{Je-li } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ pak značíme } \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ukázka 3. Podle definice je tedy $|a_{11}| = a_{11}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \\ a_{21}, & a_{22}, \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |a_{22}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot |a_{21}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

a analogicky pro $n = 3, \dots$

Definice 7. Je-li $\mathbf{M}_{ik}$ matice, která vznikne vyškrtnutím i-tého řádku a k-tého sloupce z matice $\mathbf{A}$, pak číslo $A_{ik} = (-1)^{i+k} \det \mathbf{M}_{ik}$ se nazývá *algebraický doplněk* prvku a_{ik} v determinantu $\det \mathbf{A}$.

Poznámka 8. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ik})$ je čtvercová matice řádu n a A_{ik} je algebraický doplněk prvku a_{ik} v determinantu $\det \mathbf{A}$. Pak

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{7.4}$$

což je tzv. *rozvoj determinantu podle i-tého řádku*;

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{7.5}$$

což je tzv. *rozvoj determinantu podle k-tého sloupce.*

Determinant se bude lépe počítat, bude-li obsahovat co nejvíce nulových prvků, je proto rozumné determinant při výpočtu vhodně upravovat. O tom hovoří následující věta.

VĚTA 6. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice, pak pro její determinant platí*

1. $\det \mathbf{A}$ *změní znaménko, vyměníme-li mezi sebou dva sousední řádky (sloupce) matice* $\mathbf{A}$.
2. $\det \mathbf{A}$ *se nezmění, přičteme-li v matici* $\mathbf{A}$ *k jednomu řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců) matice* $\mathbf{A}$.
3. $\det \mathbf{A} = 0$ *je-li jeden z řádků (sloupců) matice* $\mathbf{A}$ *lineární kombinací ostatních. (Zejména tehdy, má-li dva řádky (sloupce) stejné nebo je jeden řádek (sloupec) nulový.)*
4. *Jestliže v matici* $\mathbf{A}$ *vynásobíme všechny prvky některého řádku (sloupce) číslem* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pak je její determinant roven* $\alpha \det \mathbf{A}$.

7.2.1 Výpočet determinantu

K výpočtu determinantu můžeme použít přímo definici 6 (rozvoj podle prvního řádku) nebo důsledek 8. Pomocí vztahu (7.4) nebo (7.5) převedeme výpočet determinantu stupně n na výpočet determinantů stupně $n-1$, tj. rozvineme determinant podle i-tého řádku nebo podle k-tého sloupce.

1. Pro $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

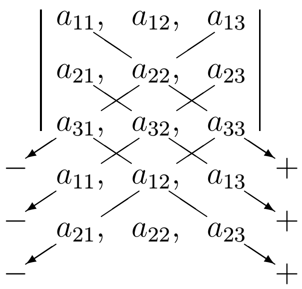
2. Pro $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Pro výpočet determinantu třetího stupně může jako pomůcka sloužit *Sarrusovo pravidlo*, které vystihuje následující diagram.



Obr. 1: Sarrusovo pravidlo.

Postupujeme-li od prvku k prvku ve směru šipek a přiřadíme-li součinu znaménko uvedené u šipky, dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}\,.$$

Počítáme-li determinant pomocí rozvoje podle řádku (sloupce), vybíráme si řádky (sloupce) s co největším počtem nul. Determinant můžeme nejdříve vhodně upravit podle věty 6.

Příklad 1. Vypočítáme determinant

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 2, & 4 \\ 0, & 1, & -1, & 2 \\ 3, & -1, & 2, & 0 \\ -1, & 0, & 3, & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1, & -1, & 2, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & 1 \\ 3, & -1, & 2, & 0 \\ -1, & 0, & 3, & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1, & 0, & 1, & 3 \\ 0, & 1, & -1, & 1 \\ 3, & 0, & 1, & 1 \\ -1, & 0, & 3, & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 3 \\ 3, & 1, & 1 \\ -1, & 3, & 1 \end{vmatrix} = 2(1 + 27 - 1 + 3 - 3 - 3) = 48.$$

Postupovat lze mnoha způsoby, zde jsme nejprve vytkli ze 4. sloupce číslo 2, poté jsme 2. řádek přičetli k 1. a 3. řádku; ve 2. sloupci zůstal jen jediný nenulový prvek, proto determinant rozvineme podle tohoto sloupce. Získaný determinant stupně 3 jsme vyčíslili pomocí Sarrusova pravidla.

Příklad 2 (pro labužníky). Vypočítáme determinant $\det \mathbf{A}$ stupně n

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1,\ 2,\ 1 \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 2 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Determinant rozvineme podle prvního sloupce

$$\det \mathbf{A} = 2 \begin{vmatrix} 2,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1,\ 2,\ 1 \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1,\ 2,\ 1 \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1,\ 2,\ 1 \\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2,\ 1,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ \dots,\ 0,\ 0,\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1,\ 2,\ 1 \\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 2 \end{vmatrix},$$

když jsme determinant ve druhém členu rozvinuli podle prvního řádku. První člen na pravé straně je dvojnásobek determinantu stejné struktury, jakou má daný determinant, ale jeho stupeň je o 1 nižší, determeninat ve druhém členu je také stejné struktury, ale jeho stupeň je o 2 nižší. Dostáváme tak rekurentní vztah

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}\,,$$

kde $D_1 = |\,2\,| = 2$ a $D_2 = \begin{vmatrix} 2,\ 1 \\ 1,\ 2 \end{vmatrix} = 3$. Z rekurentního vztahu pak dostaneme

$$D_n = n + 1.$$

(Máme totiž $D_3 = 4$, $D_4 = 5, \dots$ To vede k hypotéze, že $D_n = n + 1$. Důkaz lze provést matematickou indukcí, indukční předpoklad se ověří analogicky s úpravou determinantu provedenou v našem příkladu. Lze také přímo sečíst rekurentní vztahy pro $n = 3, \dots, k$, získáme aritmetickou posloupnost $D_k = D_{k-1} + 1$ a odsud $D_n = n + 1$.)

Poznámka 9. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a nechť $\mathbf{A}$ je diagonální nebo dolní trojúhelníková nebo horní trojúhelníková matice. Pak

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}\,.$$

7.3 Typy čtvercových matic

Definice 8. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá *regulární*, jestliže k ní existuje matice $\mathbf{B}$ tak, že

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}\,.$$

Matice $\mathbf{B}$ se nazývá *inverzní* k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^{-1}$.

VĚTA 7. *Čtvercová matice* $\mathbf{A} = (a_{ik})$ *je regulární, právě když* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *V tomto případě má inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1} = (\alpha_{ik})$ *prvky*

$$\alpha_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det \mathbf{A}}\,,$$

kde A_{ki} *jsou algebraické doplňky prvků* a_{ki} *v determinantu* $\det \mathbf{A}$. *Pro determinanty inverzních matic platí*

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\ .$$

DEFINICE 9. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá *singulární*, jestliže $\det \mathbf{A} = 0$.

VĚTA 8.
1. Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ *je regulární maticí* $\mathbf{A}$ *jednoznačně určena a platí*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}\ .$$

2. Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *regulární matice stejného řádu, pak jejich součin* $\mathbf{AB}$ *je také regulární matice a platí*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

3. Je-li $\mathbf{A}$ *regulární matice, je transponovaná matice* $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ *také regulární a platí*

$$\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathsf{T}}.$$

4. Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ *platí* $\det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A}$.

VĚTA 9. *Stejné úpravy 1–3 z věty 3, které převedou matici* $\mathbf{A}$ *na jednotkovou matici* $\mathbf{I}$, *převedou matici* $\mathbf{I}$ *na inverzní matici* $\mathbf{A}^{-1}$.

PŘÍKLAD 3. Najděte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 5, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

1. Podle věty 7. Determinant $\det \mathbf{A} = 15$ a algebraické doplňky A_{ik} prvků a_{ik} v determinantu $\det \mathbf{A}$ jsou

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5, & 1 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3, & 5 \\ 0, & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 5, & 1 \end{vmatrix} = -13, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{15}, & \frac{4}{15}, & -\frac{13}{15} \\ -\frac{3}{15}, & \frac{1}{15}, & \frac{8}{15} \\ \frac{6}{15}, & -\frac{2}{15}, & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

2. Podle věty 9. Napíšeme matice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$ do jednoho schématu a na obě aplikujeme stejné úpravy.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1,\ 2,\ 3 & 1,\ 0,\ 0 \\ 3,\ 5,\ 1 & 0,\ 1,\ 0 \\ 0,\ 2,\ 1 & 0,\ 0,\ 1 \end{array}\right)$$

Nejprve odečteme trojnásobek prvního řádku od druhého,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 2, & 3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & -8 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right)$$

dále dvojnásobek druhého řádku přičteme k prvnímu a třetímu řádku,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & -13 & -5, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & -8 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -15 & -6, & 2, & 1 \end{array}\right)$$

druhý a třetí řádek vynásobíme číslem -1 a třetí řádek navíc vydělíme 15,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & -13 & -5, & 2, & 0 \\ 0, & 1, & 8 & 3, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & \frac{6}{15}, & -\frac{2}{15}, & -\frac{1}{15} \end{array}\right)$$

a konečně třetí řádek odečteme osmkrát od druhého řádku a přičteme třináctkrát k prvnímu řádku

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & \frac{3}{15}, & \frac{4}{15}, & -\frac{13}{15} \\ 0, & 1, & 0 & -\frac{3}{15}, & \frac{1}{15}, & \frac{8}{15} \\ 0, & 0, & 1 & \frac{6}{15}, & -\frac{2}{15}, & -\frac{1}{15} \end{array}\right)$$

a na pravé straně schématu máme inverzní matici.

7.4 Soustavy lineárních rovnic

7.4.1 Soustava m lineárních rovnic pro n neznámých

DEFINICE 10. Soustavou m lineárních rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme soustavu

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}, \tag{7.6}$$

kde a_{ik}, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, a $b_1, \dots, b_m$ jsou daná reálná čísla.

Řešením soustavy (7.6) se nazývá každá uspořádaná n-tice reálných čísel $(u_1, \dots, u_n)$ taková, že po dosazení čísel $u_1, \dots, u_n$ za neznámé $x_1, \dots, x_n$ jsou splněny všechny rovnice soustavy (7.6).

Soustavě m lineárních rovnic pro n neznámých lze jednoznačně přiřadit matici koeficientů jednotlivých neznámých – řádek představuje po řadě koeficienty neznámých v dohodnutém pořadí. Sčítací metoda řešení soustavy rovnic pak přejde na následující operace s touto maticí:

1. vyměnu dva řádků mezi sebou
2. vynásobení všech prvků některého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ různým od nuly
3. přičtení k jednomu řádku matice lineární kombinace některých ostatních řádků
4. vypuštění řádku, který je lineární kombinací ostatních (např. je-li řádek stejný jako některý ostatní anebo obsahuje samé nuly)

Definice 11. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

se nazývá *matice soustavy* (7.6).

Matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}, & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn}, & b_m \end{pmatrix}.$$

se nazývá *rozšířená matice soustavy* (7.6).

Poznámka 10. Soustavu (7.6) můžeme zkráceně zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice soustavy (7.6), vektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je sloupcový vektor neznámých a $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ je sloupcový vektor pravých stran rovnic (7.6).

Věta 10. *Soustava (7.6) má řešení, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.*

Je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = n$, pak soustava (7.6) má právě jedno řešení.

Je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = r < n$, pak soustava (7.6) má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - r$ parametrech.

Příklad 4. Řešte soustavu:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z - u &= 1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení: 1. „Klasický postup:“ Z druhé rovnice $x = 2 - z$ a dosadíme do první rovnice: $2(2-z)+3y+z-u = 1 \Rightarrow 3y-z-u = -3$, odtud třeba $u = 3+3y-z$. Lze vypočítat jen dvě neznámé, v našem případě x a u, zbývající neznámé zvolíme za parametry, např. $y = k$, $z = l$. Dohodneme-li se, že řešení zapíšeme v pořadí $[x, y, z, u]$. Řešením je tedy uspořádaná čtveřice $[2 - l, k, l, 3 + 3k - l]$, $k, l \in \mathbb{R}$.

2. Rozšířená matice naší soustavy je (při dohodnutém pořadí neznámých $[x, y, z, u]$, pravá strana se někdy kvůli přehlednosti odděluje čarou):

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2, & 3, & 1, & -1 & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Odečtením druhého řádku od prvního máme:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 3, & 0, & -1 & -1 \\ 1, & 0, & 1, & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Vrátíme se k rovnicím

$$\begin{aligned} x + 3y - u &= -1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

a vyjádříme z a u: $z = 2 - x$, $u = 1 + x + 3y$. Neznámé $x = r$ a $y = s$ budou parametry. Řešení dostaneme ve tvaru $[r, s, 2 - r, 1 + r + 3s]$, $r, s \in \mathbb{R}$. (Přesvědčte se, že čtveřice z postupu 1 i 2 vyjadřují totéž.)

7.4.2 Soustava n lineárních rovnic pro n neznámých

Soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}, \tag{7.7}$$

kde a_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$, a $b_1, \ldots, b_n$ jsou daná reálná čísla.

Platí samozřejmě vše co platilo pro soustavu (7.6). Nyní lze navíc v případě regulární matice soustavy $\mathbf{A}$ využít det $\mathbf{A}$.

VĚTA 11. *Je-li* $\det \mathbf{A} \neq 0$, *má soustava (7.7) právě jedno řešení*

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\,.$$

Je-li $\det \mathbf{A} = 0$, *má soustava (7.7) buď nekonečně mnoho řešení, a to v případě* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$, *a nemá řešení v případě* $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{B})$.

7.4.3 Způsoby řešení soustavy lineárních rovnic

Gaussova eliminační metoda

VĚTA 12. *Převedeme-li úpravami 1–4 z věty 3 aplikovanými na řádky matice rozšířenou matici* $\mathbf{B}$ *soustavy (7.6) na matici* $\mathbf{B}'$, *která má pod hlavní diagonálou samé nuly, pak soustava rovnic pro n neznámých, jejíž rozšířená matice soustavy je* $\mathbf{B}'$, *má stejné řešení jako soustava (7.6).*

Můžeme tedy soustavu (7.6) převést na tvar, kdy je snadněji řešitelná.

PŘÍKLAD 5. Eliminační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= -6 \\ 5x_2 - 8x_3 &= -6 \end{aligned}\,.$$

Řešení: Upravíme rozšířenou matici soustavy

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3, & 2 \\ 3, & -1, & 1, & 0 \\ 3, & 4, & -7, & -6 \\ 0, & 5, & -8, & -6 \end{pmatrix}$$

tak, aby pod hlavní diagonálou byly nuly. Odečteme trojnásobek prvního řádku od druhého a třetího,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3, & 2 \\ 0, & 5, & -8, & -6 \\ 0, & 10, & -16, & -12 \\ 0, & 5, & -8, & -6 \end{pmatrix}$$

a vyškrneme třetí řádek, protože je stejný jako druhý, a také čtvrtý řádek, neboť je dvojnásobkem druhého. Dostaneme

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3, & 2 \\ 0, & 5, & -8, & -6 \end{pmatrix}.$$

V úpravách však můžeme pokračovat dále, vydělíme druhý řádek 5 a přičteme jeho dvojnásobek k prvnímu řádku

$$\mathbf{B}_1' = \begin{pmatrix} 1, \ 0, \ -\frac{1}{5}, \ -\frac{2}{5} \\ 0, \ 1, \ -\frac{8}{5}, \ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

a napíšeme-li soustavu nyní, máme

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{5}x_3 &= -\tfrac{2}{5} \\ x_2 - \tfrac{8}{5}x_3 &= -\tfrac{6}{5} \end{aligned},$$

Protože $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$, má soustava řešení, a protože $h(\mathbf{A}) < 3$, má jich nekonečně mnoho, závislých na jednom ($n - h(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$) parametru.

Zvolíme-li $x_3 = t$, t je parametr, pak

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5}t - \tfrac{2}{5} \\ x_2 &= \tfrac{8}{5}t - \tfrac{6}{5} \end{aligned},$$

Řešením soustavy je množina trojic $[\frac{1}{5}t - \frac{2}{5}, \frac{8}{5}t - \frac{6}{5}, t]$, $t \in \mathbb{R}$. Řešení lze upravit např. na tvar $\frac{1}{5}[t-2, 8t-6, 5t]$, $t \in \mathbb{R}$ nebo i $\frac{1}{5}\,t\,[1,8,5] + \frac{1}{5}[-2,-6,0]$, $t \in \mathbb{R}$ či $-\frac{2}{5}[1,3,0] + s[1,8,5]$, $s \in \mathbb{R}$. (Je-li $t \in \mathbb{R}$ je také $\frac{1}{5}\,t = s \in \mathbb{R}$.)

Výpočet pomocí determinantů

Věta 13 (Cramerovo pravidlo). *Nechť* $\det \mathbf{A} \neq 0$*, kde* $\mathbf{A}$ *je matice soustavy (7.7). Pak soustava (7.7) má právě jedno řešení* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, kde*

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$

přitom $\mathbf{A}_i$ *je matice, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *tak, že* i*-tý sloupec matice* $\mathbf{A}$ *nahradíme sloupcem pravých stran rovnic (7.7).*

Příklad 6. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \ .$$

Řešení: a) Soustavu vyřešíme použitím Cramerova pravidla. Vypočítáme

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3, & -2, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 2, & 0, & -3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 1, & -2, & 1 \\ -2, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & -3 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x_1 = -\frac{9}{13},$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 3, & 1, & 1 \\ 1, & -2, & -1 \\ 2, & 0, & -3 \end{vmatrix} = 23 \Rightarrow x_2 = -\frac{23}{13},$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 3, & -2, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \\ 2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow x_3 = -\frac{6}{13},$$

soustava má právě jedno řešení

$$\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} = -\frac{1}{13}(9, 23, 6).$$

b) Na ukázku předvedeme také řešení pomocí inverzní matice. Použijeme větu 11. Pomocí některé z dříve uvedených metod vypočteme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici soustavy $\mathbf{A}$, dostaneme

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3, & 6, & -1 \\ -1, & 11, & -4 \\ 2, & 4, & -5 \end{pmatrix}.$$

Je tedy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3, & 6, & -1 \\ -1, & 11, & -4 \\ 2, & 4, & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 9 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy je

$$\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} = -\frac{1}{13}(9, 23, 6).$$