

Určitý integrál

Definice: Necht' F je primitivní funkce funkce f v intervalu I . Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce f

v mezích od a do b a značí se $\int_a^b f(x) dx$.

Podle definice $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Výpočet určitých integrálů

Věta: Necht' f_1, f_2 jsou intervalu I spojité funkce, a, b necht' jsou libovolné body z I a c_1, c_2 libovolné reálné konstanty. Potom platí

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Příklad: Vypočtěte integrál $\int_0^2 (3x^3 - 2x + 5) dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3x^3 - 2x + 5) dx &= 3 \int_0^2 x^3 dx - 2 \int_0^2 x dx + 5 \int_0^2 dx = 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + 5[x]_0^2 = \\ &= 3 \left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) - 2 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 5(2 - 0) = 12 - 4 + 10 = 18 \end{aligned}$$

- Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Věta (o aditivnosti určitého integrálu): Je-li funkce f spojitá intervalu I , který obsahuje libovolně položené body a, b, c , pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Integrační metody

Metoda per partes

Věta: Jsou-li $u = u(x)$, $v = v(x)$ funkce mající v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojité derivace, pak platí

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx.$$

Příklad: Vypočítejte $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Řešení:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right| = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cos x + 0 + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

Substituční metoda

Věta: Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Nové meze v substituci $t = g(x)$ určíme jako funkční hodnoty $g(a)$, $g(b)$.

Příklad: Vypočítejte $\int_{-4}^2 \sqrt{17+4x} dx$.

Řešení:

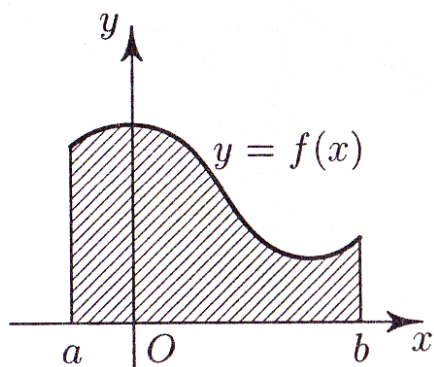
$$\int_{-4}^2 \sqrt{17+4x} dx = \left| \begin{array}{l} 17+4x = t \\ 4 dx = dt \\ dx = \frac{1}{4} dt \\ t_1 = 17+4 \cdot (-4) = 1 \\ t_2 = 17+4 \cdot 2 = 25 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_1^{25} \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int_1^{25} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{25} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} [t\sqrt{t}]_1^{25} =$$

$$= \frac{1}{6} (25 \cdot 5 - 1) = \frac{1}{6} \cdot 124 = \frac{62}{3}$$

Užití integrálního počtu

a) Obsah útvaru $U = U(a, b, f)$

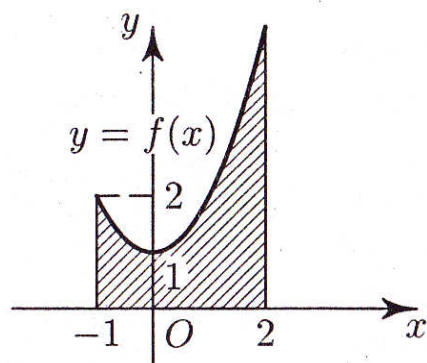
Jde o útvar omezený osou x (přímkou $y = 0$) a přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$.



$$S(U) = \int_a^b f(x) dx$$

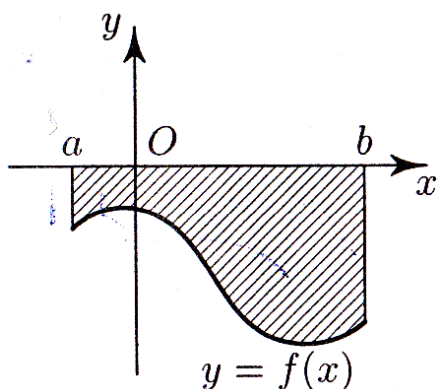
Příklad: Vypočítejte útvar, který je ohraničen křivkami $f: y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

Řešení:



$$S(U) = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} + 2 - \frac{(-1)^3}{3} + 1 = 6$$

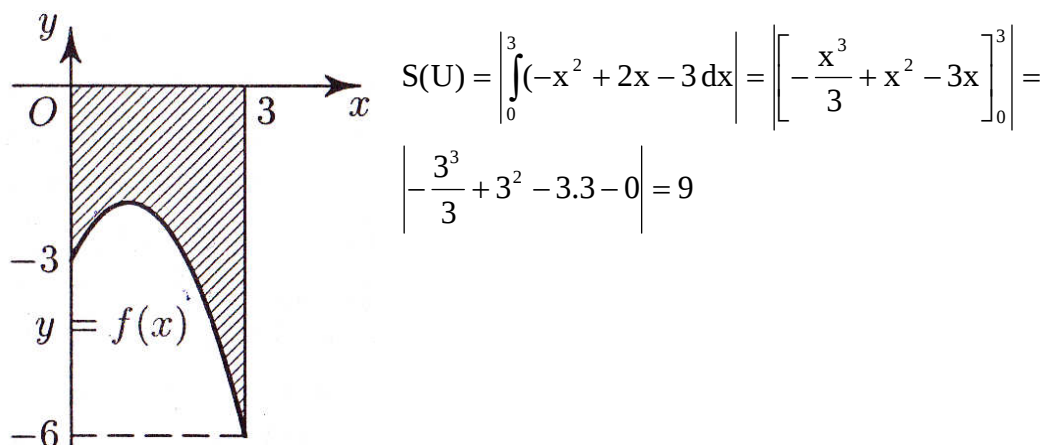
Jestliže funkce f nenabývá kladných hodnot na intervalu $\langle a; b \rangle$, pak počítáme absolutní hodnotu příslušného integrálu.



$$S(U) = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$$

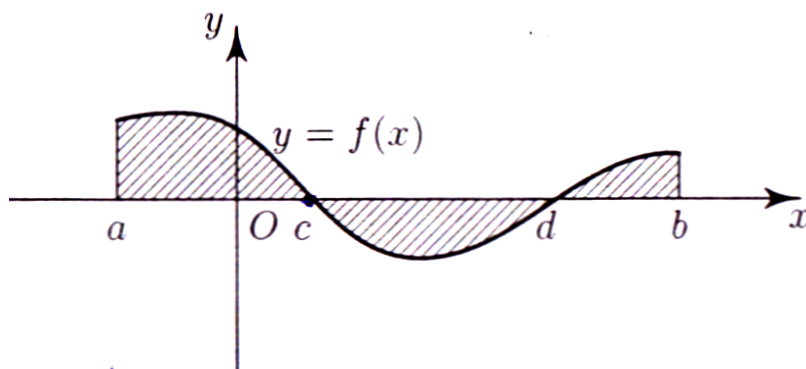
Příklad: Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $f: -x^2 + 2x - 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

Řešení:



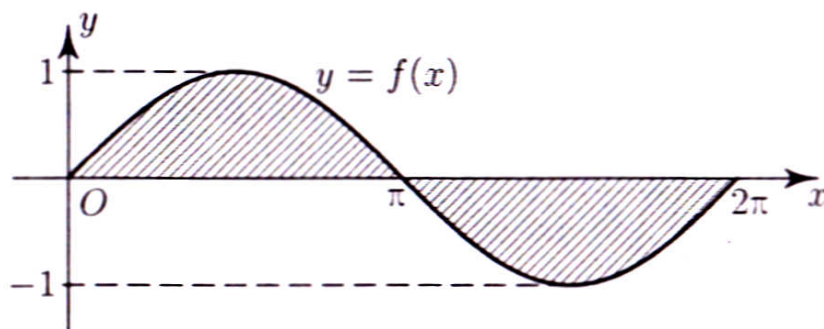
Pro funkci, která na intervalu $\langle a; b \rangle$ nabývá kladných i záporných hodnot platí:

$$S(U) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$



Příklad: Vypočtěte obsah útvaru omezeného křivkami $f: y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

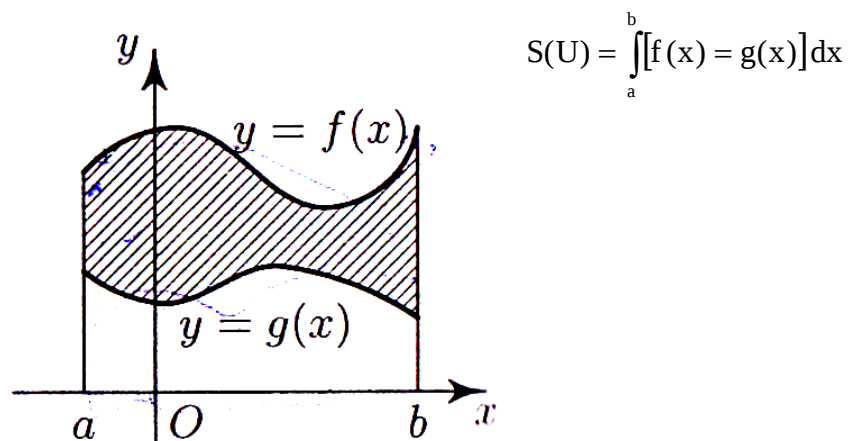
Řešení:



$$S(U) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

b) Obsah útvaru $U = U(a, b, f, g)$

Obsah útvaru ohraničeného křivkami $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ počítáme podle vztahu

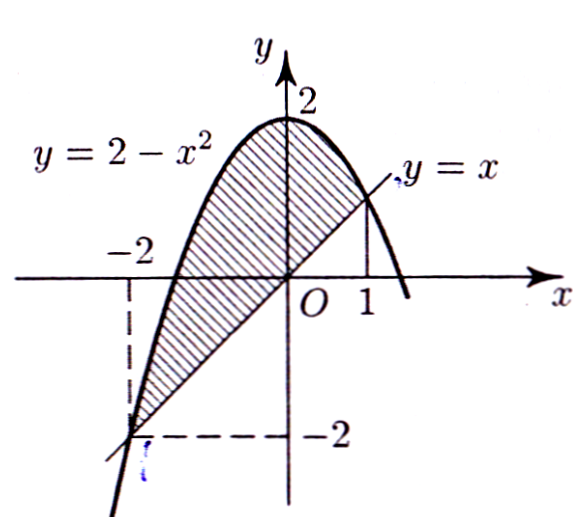


Příklad: Vypočítejte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Řešení:

Nejdříve určíme meze určitého integrálu:

$$2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ nebo } x = 1$$



$$S(U) = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) \, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

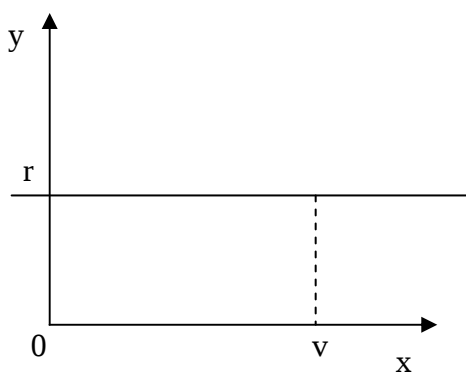
c) Objem rotačního tělesa

Věta: Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, f(x))$ kolem osy x , se vypočítá podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Příklad: Vypočítejte objem rotačního válce s poloměrem r a výškou v .

Řešení:



$$f(x) = r, x = 0, x = v$$

$$V = \pi \int_0^v r^2 dx = \pi [r^2 x]_0^v = \pi r^2 v$$

Věta: Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, f(y))$ kolem osy y , se vypočítá podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy = \pi \int_a^b x^2 dy.$$