

Primitivní funkce

Definice: Necht' f a F jsou funkce definované na intervalu I . Funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu I , jestliže pro každý bod $x \in I$ tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$.

Věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce F .

Důsledkem této věty je tvrzení, že ke každé elementární funkci existuje funkce primitivní.

Příklad: Určete primitivní funkci k $f(x) = 4x$.

Řešení:

$$F(x) = 2x^2 \text{ protože } F'(x) = (2x^2)' = 4x$$

$$F(x) = 2x^2 + 1 \text{ protože } F'(x) = (2x^2 + 1)' = 4x + 0 = 4x$$

$$F(x) = 2x^2 + 2 \text{ protože } F'(x) = (2x^2 + 2)' = 4x + 0 = 4x$$

.....

Neurčitý integrál

Věta: Necht' funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I . Potom funkce G , $G(x) = F(x) + C$, $x \in I$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, je také primitivní funkcí k f na intervalu I .

Definice: Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I se nazývá **neurčitý integrál** funkce f na intervalu I . Pro neurčitý integrál používáme zápis

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

kde dx je **diferenciál integrační proměnné** (označuje, co je proměnná), $F(x)$ je **primitivní funkce** k funkci $f(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je **integrační konstanta**.

Pravidla pro integrování

Základní vzorce pro primitivní funkce:

$$\int 0 dx = C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int dx = x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \in (0, +\infty), n \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Věta: Necht' funkce f, g mají na intervalu I primitivní funkce. Potom také funkce $(f + g)$, $(f - g)$ a $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, mají na I primitivní funkce a platí:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Poznámka:

Neexistují žádné vzorce pro přímé integrování součinu a podílu dvou funkcí!

Integrační metody

Přímá integrace

Provádějí se pouze základní algebraické úpravy výrazu a používají se základní integrační vzorce a pravidla.

Příklad 1

Vypočítejte $\int (x^3 - 3x) dx$.

Řešení:

$$\int (x^3 - 3x) dx = \int x^3 dx - 3 \int x dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

Příklad 2

Vypočítejte $\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx - \int \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{\frac{1}{6}} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

Metoda per partes:

Věta: Necht funkce u, v mají spojité derivace u' a v' na intervalu I . Potom na tomto intervalu platí:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Příklad 3

Vypočítejte $\int x \cdot \sin x dx$.

Řešení:

$$\int x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = \cos x \end{array} \right| = x \cdot \cos x - \int \cos x dx = x \cdot \cos x - \sin x + C$$

Příklad 4

Vypočítejte $\int \ln x dx$.

Řešení:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Metoda integrace substitucí:

Věta: Necht f je funkce spojitá na intervalu I a F je funkce k ní primitivní na I .

Dále předpokládáme, že funkce g má první derivaci $g'(x)$ ve všech bodech $x \in I$ a že $g(x) \in I$ pro každé $x \in I$. Pak složená funkce $F(g(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$ na intervalu I , tj.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C, \text{ kde } t = g(x)$$

Příklad 5

Vypočítejte $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 = t \\ 2x dx = 1 dt \\ dx = \frac{1}{2x} dt \end{array} \right| = \int \frac{2x}{t} \cdot \frac{1}{2x} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|x^2 - 1| + C$$

Příklad 6

Vypočítejte $\int \sqrt{5+2x} dx$.

Řešení:

$$\int \sqrt{5+2x} dx = \left| \begin{array}{l} 5 + 2x = t \\ 2 dx = 1 dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (5+2x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Příklad 7

Vypočítejte $\int x \cdot (3x^2 - 4)^5 dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x \cdot (3x^2 - 4)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 4 = t \\ 6x dx = 1 dt \\ dx = \frac{1}{6x} dt \end{array} \right| = \int \frac{x \cdot t^5}{6x} dt = \frac{1}{6} \int t^5 dt = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{36} (3x^2 - 4)^6 + C \end{aligned}$$

Příklad 8

Vypočítejte $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = 1 dt \\ dx = x dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{x} \cdot x dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$