

Využití derivací

**1) Rozdělte číslo 30 na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.**

Řešení:

Prvního sčítance označíme  $x$ , druhého  $30 - x$ .

Pro jejich součin sestavíme funkci:  $f(x) = x \cdot (30 - x)$

Hledáme maximum funkce:  $f(x) = x \cdot (30 - x) = 30x - x^2$

$$f'(x) = 30 - 2x = 0, x = 15$$

$$f''(x) = -2, \text{ tedy i } f''(15) = -2 < 0 \text{ (maximum)}$$

$$\mathbf{x = 15}$$

**2) Najděte kladné reálné číslo  $x$ , aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální.**

Řešení:

Sestavíme funkci:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Hledáme její minimum:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$$

$$f''(x) = 2x^{-3}, f''(1) = 2 > 0; \text{ minimum pro } x = 1$$

Podle zadání je řešením  $\mathbf{x = 1}$ .

**3) Číslo 28 vyjádřete jako součin dvou sčítanců  $x$ ,  $28 - x$  tak, aby jejich součin byl co největší.**

Řešení:

Pro součin sestavíme funkci:  $f(x) = x \cdot (28 - x)$

Hledáme maximum funkce:  $f(x) = x \cdot (28 - x) = 28x - x^2$

$$f'(x) = 28 - 2x = 0, x = 14$$

$$f''(x) = -2, \text{ tedy i } f''(14) = -2 < 0 \text{ (maximum)}$$

$$\mathbf{x = 14}$$

**4) Najděte obdélník s obvodem  $O = 72$  cm tak, aby měl maximální obsah.**

Řešení:

$$O = 2 \cdot (a + b) \Rightarrow a = \frac{O}{2} - b$$

$$S = a \cdot b$$

$$S(b) = \left(\frac{O}{2} - b\right) \cdot b = \frac{O}{2} \cdot b - b^2$$

$$S'(b) = \frac{0}{2} - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{0}{4}$$

$$b = \frac{72}{4} = 18 \text{ cm}$$

$$S''(b) = -2 < 0 \text{ (maximum)}$$

$$a = \frac{72}{2} - 18 = 18 \text{ cm}$$

**5) Číslo 100 vyjádřete jako součet dvou sčítanců tak, aby součet jejich druhých mocnin byl minimální.**

Řešení:

Prvního sčítance označíme  $x$ , druhého  $100 - x$ .

Sestavíme funkci:  $x^2 + (100 - x)^2 = f(x)$

Hledáme minimum:

$$f(x) = x^2 + 10000 - 200x + x^2 = 2x^2 - 200x + 10000$$

$$f'(x) = 4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50$$

$$f''(x) = 4 > 0 \text{ (minimum)}$$

$$x = 50$$

**6) Najděte obdélník s obsahem  $S = 25 \text{ cm}^2$  tak, aby měl minimální obvod.**

Řešení:

$$S = a \cdot b \Rightarrow a = \frac{S}{b}$$

$$O = 2 \cdot (a + b) \Rightarrow O(b) = 2 \cdot \left( \frac{S}{b} + b \right) = 2Sb^{-1} + 2b$$

$$O'(b) = -2Sb^{-2} + 2$$

$$-2 \cdot 25 \cdot b^{-2} + 2 = 0$$

$$25 = b^2$$

$$b = 5$$

$$O''(b) = 4Sb^{-3}$$

$$O''(5) = 4 \cdot 25 \cdot (5)^{-3} > 0 \text{ (minimum)}$$

$$b = 5, a = 5$$

**7) Válec má objem  $V = 27 \text{ cm}^3$ . Najděte jeho výšku a poloměr tak, aby jeho povrch byl co nejmenší.**

Řešení:

$$V = \pi r^2 v$$

$$S = \pi r^2 + 2\pi r v$$

Vyjádříme  $S$  jako funkci poloměru:

$$v = \frac{V}{\pi r^2} \text{ a tedy } S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Hledáme minimum funkce  $S(r)$ :

$$S'(r) = 2\pi r - 2V \cdot \frac{1}{r^2} = 0$$

$$2\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$$\text{V našem případě } r = \sqrt[3]{\frac{27}{\pi}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm,}$$

$$v = \frac{V}{\pi r^2} \text{ a tedy } v = \frac{27}{9\pi} = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}$$