

Shodná zobrazení

Zobrazení Z v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny. Bod X se nazývá vzor, bod X' jeho obraz; zapisujeme $Z: X \rightarrow X'$.

Zobrazení v rovině je **shodné zobrazení** nebo také shodnost, jestliže obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB .

Názornou představu shodného zobrazení dává přemístění užitím průsvitky. Je dán útvar U . Překreslíme ho na průsvitku. Průsvitku přemístíme buď tak, že ji ponecháme vzhledem k rovině lícem nahoru, nebo obrátíme lícem dolů. Útvar v přemístěné poloze překreslíme zpět do dané roviny. Dostaneme tak nový útvar, který je shodný s útvarem daným a je jeho obrazem.

Jestliže je třeba při přemísťování obracet průsvitku jde o **nepřímou shodnost**. Neobrátime-li průsvitku jde o **shodnost přímou**.

V každém shodném zobrazení je

- obrazem přímky AB přímka $A'B'$; obrazem rovnoběžných přímek rovnoběžné přímky,
- obrazem polopřímky AB polopřímka $A'B'$; obrazem opačných polopřímek opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny pA polorovina $p'A'$; obrazem opačných polorovin opačné poloroviny,
- obrazem úhlu AVB úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB ,
- obrazem útvaru U útvar U' shodný s útvarem U .

1. Osová souměrnost

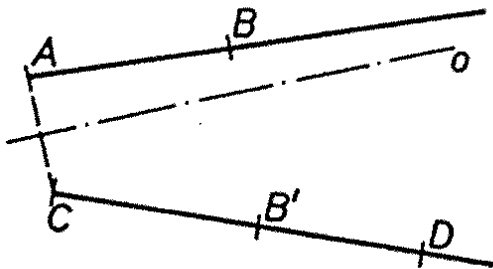
Je dána přímka o . Osová souměrnost s osou o je shodné zobrazení $O(o)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o ,
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.

Přímka o se nazývá **osa osově souměrnosti**. Osová souměrnost je nepřímá shodnost.

Příklad 1

Jsou dány dvě různé polopřímky AB , CD ležící ve dvou různých přímkách a s různými počátky. Určete osovou souměrnost, která zobrazí polopřímku AB na polopřímku CD .



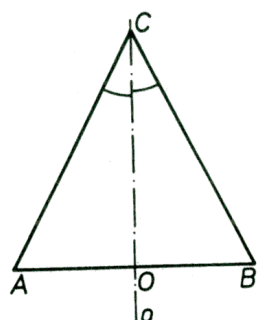
Řešení

Jestliže taková souměrnost existuje, je její osa o osou úsečky AC . Sestrojíme na polopřímce CD bod B' tak, aby $|CB'| = |AB|$. Přímka o musí být také osou úsečky BB' .

Na obrázku není přímka o osou úsečky BB' . Úloha nemá řešení; neexistuje osová souměrnost, v níž by obrazem polopřímky AB byla polopřímka CD .

Příklad 2

Rovnoramenný trojúhelník je souměrný podle přímky, která půlí jeho vnitřní úhel proti základně. Dokažte.



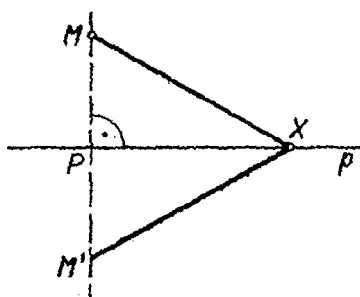
Řešení

Nechť trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB . Přímka o , která prochází bodem C a půlí úhel při vrcholu C , protíná AB v bodě O . $\triangle AOC \cong \triangle BOC$ (podle *sus*). Odtud $AO \cong BO$, neboli bod O je středem úsečky AB . $\sphericalangle AOC \cong \sphericalangle BOC$; tyto shodné úhly jsou vedlejší, a tedy pravé.

Proto obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou o je bod B (a naopak), bod C je samodružný bod. Obrazem trojúhelníku ABC je tak v osové souměrnosti s osou o tentýž trojúhelník. Trojúhelník ABC je proto souměrný podle osy o .

Příklad 3

Mějme danu přímku p a bod $M \notin p$. Nechť P je pata kolmice spuštěné z bodu M na přímku p . Dokažte, že pak $|MP| < |MX|$, kde X je libovolný bod přímky p různý od bodu P .



Řešení

Nechť M' je bod souměrně sdružený s bodem M podle přímky p . Podle vlastností osové souměrnosti je $|MP| = |M'P|$ a $|MX| = |M'X|$. Dále z trojúhelníkové nerovnosti

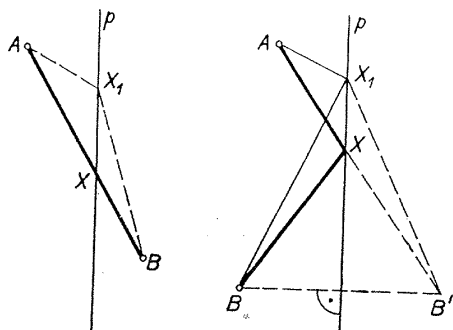
(pro $MM'X$) plyne, že $|MM'| < |MX| + |M'X|$ čili $2|MP| < 2|MX|$, odkud dostáváme dokazovanou nerovnost $|MP| < |MX|$.

Příklad 4

Je dána přímka p a dva body A, B uvnitř

- a) opačných polorovin,
- b) téže poloroviny vyřáté přímkou p .

Najděte na přímce p bod X tak, aby součet jeho vzdáleností od bodů A, B byl co nejmenší.



Řešení

- a) Leží-li body A, B uvnitř opačných polorovin vyřátých přímkou p , je hledaný bod X zřejmě průsečík úsečky AB s přímkou p , takže $|AX| + |BX| = |AB|$. Pro každý jiný bod $X_1 \neq X$ přímky p totiž podle trojúhelníkové nerovnosti platí $|AX_1| + |BX_1| > |AB|$.
- b) Leží-li body A, B uvnitř téže poloroviny vyřáté přímkou p , je hledaný bod X zřejmě průsečík úsečky AB' s přímkou p , kde B' je bod souměrně sdružený k bodu B podle přímky p ; pak $|AX| + |BX| = |AX| + |B'X| = |AB'|$. Pro každý jiný bod $X_1 \neq X$ přímky p totiž platí $|AX_1| + |BX_1| = |AX_1| + |B'X_1| > |AB'|$.

Konstrukce

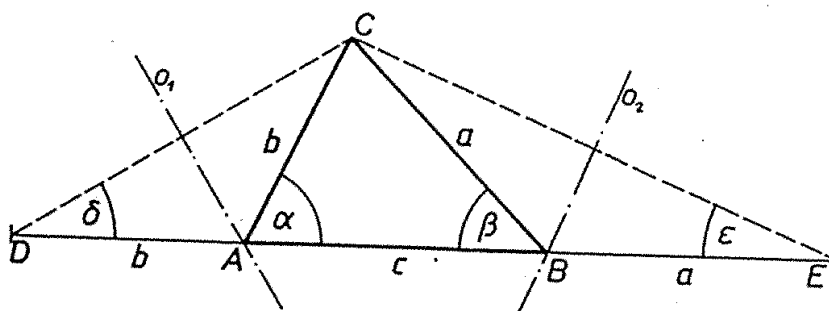
- a) 1. AB
2. $X; X = AB \cap p$
- b) 1. $B'; O(p): B \rightarrow B'$
2. AB'
3. $X; X = AB' \cap p$

Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad 5

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , je-li dán jejich obvod $o = 12\text{cm}$ a úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.



Řešení

Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Na prodloužení úsečky AB za bod A sestrojíme bod D a na její prodloužení za bod B bod E tak, aby platilo $|AD| = |AC|$, $|BE| = |BC|$. Potom je $|DE| = o$.

Trojúhelníky CDA a CEB jsou rovnoramenné. Z věty o vnějším úhlu v trojúhelníku

$$\text{plyne } \delta = \frac{1}{2}\alpha, \varepsilon = \frac{1}{2}\beta.$$

Úlohu řešíme tedy tak, že sestrojíme trojúhelník DEC . Body A, B leží na osách souměrnosti úseček DC, CE a na přímce DE .

Konstrukce

1. DE ; $|DE| = o$
2. DX ; $|\sphericalangle XDE| = \frac{1}{2}\alpha$
3. EY ; $|\sphericalangle YED| = \frac{1}{2}\beta$
4. C ; $C = DX \cap EY$
5. o_1 ; o_1 je osa souměrnosti DC
6. A ; $A = o_1 \cap DE$

7. o_2 ; o_2 je osa souměrnosti CE
8. B ; $B = o_2 \cap DE$
9. $\triangle ABC$

Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Úlohy

- 1.1 Zvolte si nepravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvolené osy. Proveďte to třikrát. Osu souměrnosti volte poprvé tak, aby ležela celá vně pětiúhelníka, podruhé tak, aby obsahovala jednu stranu, potřetí tak, aby protřela strany AB a CD .
- 1.2 Která tištěná písmena veliké abecedy jsou souměrná (mají-li všechny části jejich stejnou tloušťku) a dle které osy?
[A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, T, U, V, W, X]
- 1.3 Vznikne-li z daného útvaru U_1 překlopením kolem určité osy útvar U_2 , z tohoto překlopením kolem téže osy útvar U_3 , v jakém vztahu jsou U_1 a U_3 ?
[Útvary jsou totožné.]
- 1.4 Z kterých měst v našem státě jest vzduchem stejně daleko do Prahy jako do Brna, z kterých do jednoho města blíže než do druhého?
[Z měst ležících na ose úsečky Praha Brno.]
- 1.5 Dokažte že pravidelný n -úhelník má n os souměrnosti. Kudy procházejí?
Zkoumejte napřed případy $n = 3, 4, 5, 6$, potom se pokuste usuzovati obecně. Musíte rozeznávat dva případy podle toho, zda číslo n je liché či sudé.
- 1.6 Jsou dány dvě různé přímky p a o a kružnice $k(O, r)$. Sestrojte úsečku XY tak, aby byla kolmá k přímce o , její krajní body X, Y ležely po řadě na přímce p a kružnici k a její střed S ležel na přímce o .
[Přímka o je osa souměrnosti.]
- 1.7 Je dána přímka p a body A, B ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou p (AB není kolmá k p). Sestrojte na přímce p bod V tak, aby osa úhlu AVB ležela v přímce p .

[Bod B se zobrazí v osově souměrnosti s osou p na B' , bod V je průsečík polopřímky $B'A$ a přímky p .]

1.8 Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dán rozdíl jeho úhlopříčky a strany.

[Sestrojte $\triangle BEC$: $|BE| = e - a$, úhel $BEC = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ)$, úhel CBE je pravý; doplňte na čtverec.]

1.9 Kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p . Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy A, C ležely po řadě na kružnicích k_1, k_2 a úhlopříčka BD ($|BD| = 5$ cm) na přímce p . Volte vzájemnou polohu kružnic k_1, k_2 a přímky p tak, aby úloha měla

- a) 2 řešení,
- b) 1 řešení,
- c) 0 řešení,
- d) nekonečně mnoho řešení

[Přímka p je osa souměrnosti.]

1.10 Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno

- a) $c = 7$ cm, $v_a = 6,5$ cm, $a + b = 12,5$ cm,
- b) $c = 4$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $b - a = 1$ cm.

[a) Sestrojte $\triangle ABD$: $|BD| = a + b$, $|AB| = c$, v_a ; o je osa úsečky AD , $C \in o \cap BD$. b)

Sestrojte $\triangle ABD$: $|AD| = b - a$, $|AB| = c$, úhel $DAB = 180^\circ - \alpha$; o je osa úsečky BD ,

$C \in AD \cap o$.]

2. Středová souměrnost

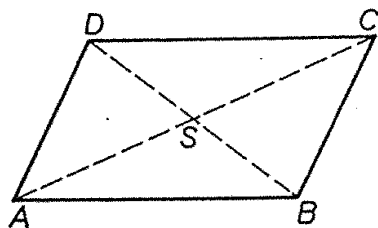
Je dán bod S . Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení $S(S)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' ,
2. bodu S bod $S' = S$.

Bod S se nazývá **střed středové souměrnosti**. Středová souměrnost je přímá shodnost.

Příklad 1

Jestliže se ve čtyřúhelníku úhlopříčky půlí, je čtyřúhelník rovnoběžníkem. Dokažte.



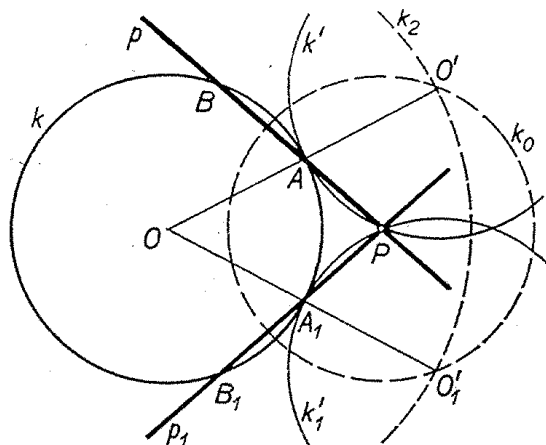
Řešení

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ označme S společný bod úhlopříček AC a BD . Úhlopříčky se podle předpokladu půlí, proto S je společným středem úseček AC a BD .

Ve středové souměrnosti se středem S je tedy bod A obrazem bodu C , bod B obrazem bodu D a také úsečka AB je obrazem úsečky CD a úsečka BC obrazem úsečky DA . Proto $AB \parallel CD$ a $BC \parallel DA$ neboli čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.

Příklad 2

Je dána kružnice $k(O, r)$. Bodem P , který leží vně kružnice k , ved'te přímku p , která protíná kružnici v bodech A, B tak, že bod A je středem úsečky BP .



Řešení

V souměrnosti podle středu A je obrazem kružnice k kružnice $k'(O', r)$, která se dotýká vně kružnice k v bodě A (neboť $|OO'| = 2r$), obrazem bodu P bod B . Tím je úloha převedena na úlohu sestavit kružnici k' o poloměru r , která se dotýká vně kružnice k a prochází bodem P .

Konstrukce

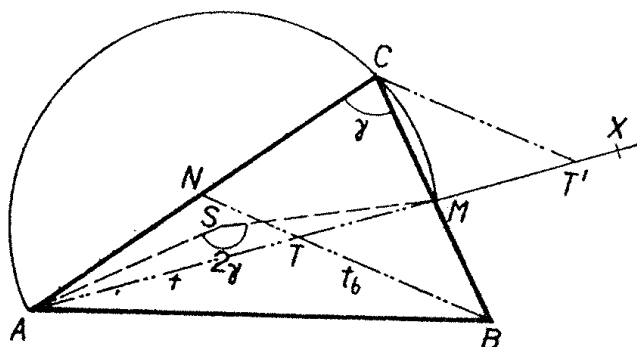
1. $k_0; k_0(P, r)$
2. $k_2; k_2(O, 2r)$
3. $O'; O' = k_0 \cap k_2$
4. $k'; k'(O', r)$
5. $A; A = k \cap k'$
6. $B; B = k \cap PA$

Diskuze

Úloha má žádné, jedno nebo dvě řešení závislé na počtu společných bodů kružnic k_0 a k_2 .

Příklad 3

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán úhel γ a těžnice t_a, t_b .



Řešení

Předpokládejme, že úloha má řešení. Je dáno $t_a = |AM|$, $t_b = |BN|$. Sestrojíme-li bod T' souměrně sdružený s těžištěm T podle středu M , je $\triangle MT'C \cong \triangle MTB$, neboť jsou souměrně sdružené v uvažované souměrnosti; proto $|CT'| = |BT| = \frac{2}{3} t_b$. Jestliže

tedy na polopřímku AX umístíme $|AT| = |TT'| = \frac{2}{3} t_a$, $|AM| = t_a$, převedeme danou

nepolohovou úlohu na úlohu polohovou se 2 neznámými body – vrcholy B a C .

Bod C musí vyhovovat těmto 2 podmínkám:

- ležet na kruhovém oblouku ACM , z něhož je vidět úsečku AM v úhlu γ ,
- mít od bodu T' vzdálenost $\frac{2}{3} t_b$.

bod B pak musí splňovat tyto 2 podmínky:

- mít od těžiště T vzdálenost $\frac{2}{3} t_b$,
- ležet na polopřímce CM .

Konstrukce

- AM
- T ; $T \in AM$, $|AT| = \frac{2}{3} |AM|$
- M_1 ; $M_1 = \{X, \text{velikost úhlu } AXM \text{ je rovna } \gamma\}$
- T' ; $S(M)$: $T \rightarrow T'$

5. $k'; k'(T', \frac{2}{3}t_b)$
6. $C; C = k' \cap M$
7. $B; S(S): C \rightarrow B$
8. $\triangle ABC$

Diskuze

Úloha může mít žádné, nebo jedno řešení v závislosti na počtu společných bodů kružnice k' a množiny M .

Úlohy

- 2.1 Zvolte si nepravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvoleného středu. Proved'te to třikrát. Střed souměrnosti volte poprvé vně pětiúhelníka, podruhé na obvodě, potřetí uvnitř.
- 2.2 Dány jsou dvě libovolné čáry (dvě přímky, dvě kružnice, přímka a kružnice, ...) a mezi nimi bod; jest vésti bodem tím přímku tak, aby úsečky na ní mezi bodem a čarami byly stejně dlouhé.

[Bod zvolíme za střed souměrnosti.]

- 2.3 Má-li nějaký geometrický útvar dvě k sobě kolmé osy souměrnosti, musí mít také střed souměrnosti. Dokažte.

[Průsečík os souměrnosti je střed souměrnosti.]

- 2.4 Je dána kružnice $k(O, r)$, přímka p mající od jejího středu vzdálenost $v > 0$ a bod S uvnitř poloroviny pO . Sestrojte úsečku se středem S , která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p .

[Bod S je střed souměrnosti.]

- 2.5 Jsou dány tři body K, L, S , které neleží v přímce. Sestrojte takový čtverec $ABCD$ se středem S , aby přímka AB procházela bodem K a přímka CD bodem L .

[Přímky AB a CD jsou souměrně sdružené podle středu S , přímka CD prochází bodem K' .]

- 2.6 Je dána úsečka AA_1 ($AA_1 = 5$ cm). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí

- a) $c = 4$ cm, $b = 7$ cm;

- b) $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$;
- c) $b = 6 \text{ cm}, \beta = 45^\circ$;
- d) $b = 6 \text{ cm}, t_b = 6 \text{ cm}$.

[Bod A_I je střed souměrnosti.]

2.7 Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 , které se protínají ve dvou bodech Q a R .

- a) Bodem Q ved'te přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.
- b) Sestrojte trojúhelník RST tak, aby $S \in k_1, T \in k_2$ a bod Q byl středem strany ST .

[Bod Q je střed souměrnosti.]

3. Posunutí

Orientovaná úsečka je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je tzv. počáteční bod; druhý krajní bod je jejím koncovým bodem. Orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B značíme $\overrightarrow{AB}$.

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou souhlasně orientované, jestliže buď

1. leží na téže přímce a polopřímka $\overrightarrow{AB}$ je částí polopřímky $\overrightarrow{CD}$, příp. polopřímka $\overrightarrow{CD}$ je částí polopřímky $\overrightarrow{AB}$, příp. obě polopřímky splynou, nebo
2. leží na různých rovnoběžkách a polopřímky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC .

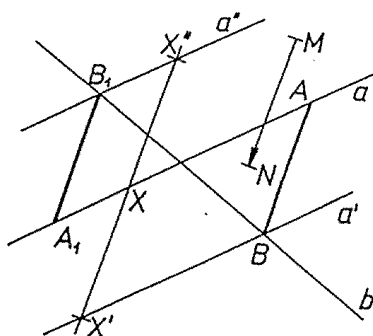
Pomocí orientované úsečky můžeme definovat posunutí:

Je dána orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí neboli translace je shodné zobrazení $T(\overrightarrow{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a jsou souhlasně orientovány.

Délkou orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ je určena délka posunutí, její orientace určuje směr posunutí. Posunutí je přímá shodnost.

Příklad 1

Jsou dány dvě různoběžky a , b a úsečka MN . Sestrojte úsečku $\overrightarrow{AB}$ shodnou a rovnoběžnou s úsečkou $\overrightarrow{MN}$ tak, aby její krajní body A , B ležely po řadě na přímkách a , b .



Řešení

Předpokládejme, že je úloha vyřešena. V posunutí určeném orientovanou úsečkou MN přejde bod A do bodu B , přímka a do přímky a' . Protože bod $A \in a$, je bod B jako obraz bodu A bodem přímky a' . Je proto $B \in a' \cap b$.

Konstrukce

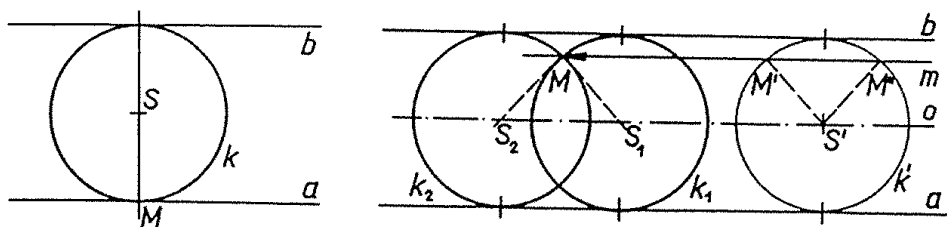
1. a' ; $T(MN): a \rightarrow a'$
2. B ; $B = a' \cap b$
3. A ; $T^{-1}(MN): B \rightarrow A$
4. AB

Diskuze

Úloha má vždy dvě řešení, druhé dostaneme při posunutí $T(NM)$.

Příklad 2

Jsou dány přímky $a \parallel b$ a bod M . Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M .



Řešení

Aby měla úloha řešení, musí ležet bod M v pásu (a, b) . Pro $M \in a$ ($M \in b$) je řešení jediné.

Jestliže $M \notin a$, $M \notin b$, můžeme při řešení použít posunutí. Hledané kružnice jsou dvě.

Střed kružnice, která se dotýká přímek a, b , leží na ose pásu (a, b) . Sestrojíme pomocnou kružnici k' , která se dotýká přímek a, b , ale neprochází bodem M .

Bodem M vedeme přímkou $m \parallel a$; její průsečíky s k označíme M' a M'' . Hledané kružnice jsou obrazy kružnice k' v posunutí $T(M'M)$ a $T(M''M)$.

Konstrukce

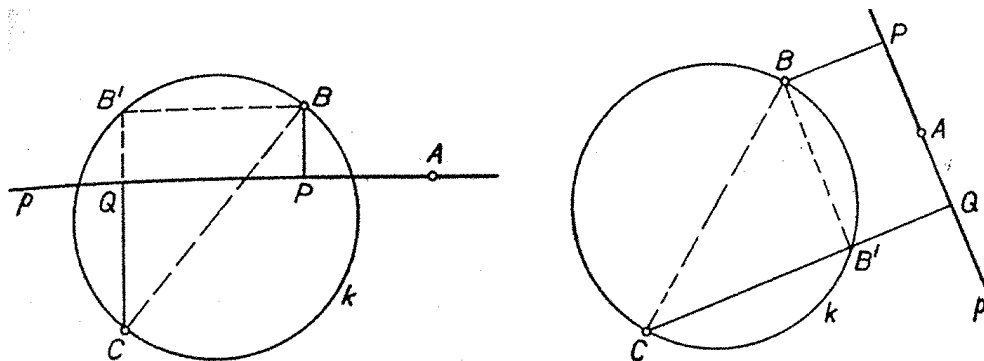
1. o ; o je osa pásu (a, b)
2. S ; $S' \in o$
3. k' ; $k'(S', \frac{1}{2}|ab|)$
4. m ; $m \parallel a, M \in m$
5. M ; $M = m \cap k'$
6. k ; $T(M'M)$; $k' \rightarrow k$

Diskuze

Úloha má žádné, jedno, nebo dvě řešení, v závislosti na počtu společných bodů přímky m a kružnice k' .

Příklad 3

Daným bodem A ved'te přímkou p tak, aby součet nebo rozdíl vzdáleností této přímky od dvou různých daných bodů B, C ($B \neq A, C \neq A$) byl roven danému číslu $d > 0$.



Řešení

Vzdálenosti bodů B a C od hledané přímky p jsou BP a CQ , přičemž $|BP \pm CQ| = d$. Posuneme-li BP do polohy $B'Q$, je $|B'C| = d$. Je-li bod B' vnějším bodem úsečky CQ , je $|BP + CQ| = d$; je-li bod B' vnitřním bodem úsečky CQ , je $|BP - CQ| = d$. V pravouhlém trojúhelníku $BB'C$ známe tedy přeponu BC a odvěsnu $B'C$.

Konstrukce

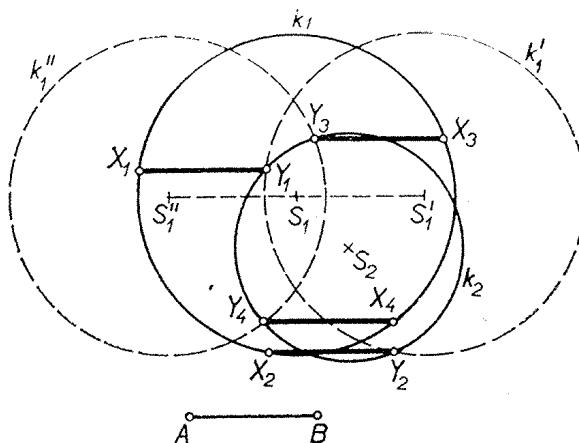
1. BC
2. k ; k = thaletova kružnice nad BC
3. k_1 ; $k_1(C, d)$
4. B' ; $B' = k \cap k_1$
5. p ; $A \in p$, $B'C \perp p$

Diskuze

Je-li $d < |BC|$, má úloha dvě řešení, je-li $d > |BC|$, nemá úloha řešení, je-li $d = |BC|$, má úloha jediné řešení.

Příklad 4

Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a dva různé body A, B . Sestrojte úsečku XY rovnoběžnou s AB tak, aby bod X ležel na k_1 , bod Y na k_2 a aby platilo $|XY| = |AB|$.



Řešení

Provedeme-li buď posunutí určené vektorem $\overrightarrow{AB}$ nebo posunutí určené vektorem $\overrightarrow{BA}$, bude $X' = Y$. Protože posunutí je zobrazení shodné, je obrazem každé kružnice opět kružnice shodná s původní. Bod Y tedy leží na kružnici k_2 a na kružnici k_1' , která je obrazem kružnice k_1 v uvažovaném 1. nebo 2. posunutí.

Konstrukce

1. k'_1 ; $T(\mathbf{AB}): k_1 \rightarrow k'_1$
2. Y ; $Y = k'_1 \cap k_2$
3. X ; $T^{-1}(\mathbf{AB}): Y \rightarrow X$
4. XY

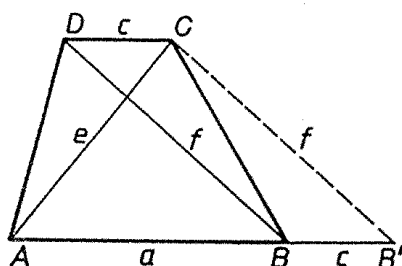
Diskuze

Úloha může mít žádné, jedno, dvě nebo nekonečně mnoho řešení v závislosti na počtu společných bodů kružnice k_2 a obrazem kružnice k_1 v posunutí $\mathbf{AB}$.

V posunutí $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ tedy úloha může mít žádné, jedno, dvě, tři, čtyři, nebo nekonečně mnoho řešení.

Příklad 5

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základů a , c a obou jeho úhlopříček e , f .



Řešení

Předpokládejme, že je úloha řešitelná. Posunutí $T(\mathbf{DC})$ zobrazí bod D do bodu C , bod B do bodu B' , úsečku BD do úsečky $B'C$.

V trojúhelníku $AB'C$ jsou délky stran $|AB'| = a + c$, $|B'C| = f$, $|AC| = e$.

Body B a D jsou pak obrazy bodů B' a C v posunutí $T^{-1}(\mathbf{DC})$.

Konstrukce

1. AB ; $|AB| = a$
2. B' ; $T(\mathbf{DC}): B \rightarrow B'$
3. k_1 ; $k_1(A, e)$

4. $k_2; k_2(B', f)$
5. $C; C = k_1 \cap k_2$
6. $D; T^{-1}(DC): C \rightarrow D$

Diskuze

Úloha má jedno, nebo žádné řešení, v závislosti na počtu společných bodů kružnic k_1 a k_2 .

Úlohy

- 3.1 Mysleme si list papíru s jednoduchým linkováním dvojmo; kterým posunutím splyne určitá linka s druhou určitou (třeba sousední), při kterém posunutí zůstane určitá linka jako celek na svém místě? Co se stane v obou případech s ostatními linkami?
 - 3.2 Jest dána kružnice středu S poloměru r a přímka p středem S procházející. Posuňte kružnici podél p několikrát o délku $\frac{1}{2}r$ a sledujte polohu několika bodů na kružnici, pomocí kružítko tam vytčených.
 - 3.3 Útvar U_1 posuneme o délku a v útvar U_2 , tento o délku b v útvar U_3 ; jest možno posunutím o délku c převést U_1 v U_3 . v jakém vztahu je c k a a b , kdy je c největší, kdy nejmenší a jak veliké v těchto případech?
- [Délka c je rovna velikosti úhlopříčky rovnoběžníku se stranami a, b .]

3.4 Zobrazte trojúhelník ABC v posunutí

- a) $T(\mathbf{AB})$
- b) $T(\mathbf{AA}_1)$, kde A_1 je střed strany BC ,
- c) $T(\mathbf{AO})$, kde O je průsečík výšek.

3.5 Je dána kružnice $k(S, r)$ a úsečka XY . Sestrojte tětivu AB kružnice k tak, aby $AB \parallel XY$ a $|AB| = |XY|$.

[Sestrojte pomocnou kružnici $k'(S', r)$, $X \in k'$, $Y \in k'$; užíjte posunutí $T(SS')$.]

3.6 Jsou dány kružnice $k_1(S_1, 3 \text{ cm})$, $k_2(S_2, 2 \text{ cm})$, $|S_1S_2| = 7 \text{ cm}$. Sestrojte všechny

úsečky XY , pro které platí: $X \in k_1$, $Y \in k_2$, $XY \parallel S_1S_2$, $|XY| = \frac{1}{2}|S_1S_2|$.

[Užijte posunutí o délce $\frac{1}{2}|S_1S_2|$, jehož směr je rovnoběžný s přímkou S_1S_2 .]

3.7 Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka MN . Sestrojte čtverec $ABCD$, pro který platí $A \in a, B \in b, AB \parallel MN, |AB| = |MN|$.

[Užijte posunutí $T(MN)$, příp. $T(NM)$.]

3.8 Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), jsou-li dány velikosti všech čtyř stran.

[Posuňte stranu BC o vektor CD do polohy $B'D$, sestrojte $\triangle AB'D$.]

3.9 Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r . Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a , poloměrem r , které na přímce b vytínají tětivu délky r .

[Sestrojte pomocnou kružnici k' o poloměru r tak, aby vytínala tětivu délky r ; užijte posunutí, jehož směr je rovnoběžný s přímkou b .]

3.10 Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

a) α, v_b, t_a ,

b) v_a, v_b, t_b ,

c) α, v_c, t_a

[a) Doplňte na rovnoběžník $ABDC$ a sestrojte $\triangle ABD$. b) Sestrojte pravoúhlý $\triangle BMP$:

$|BP| = v_b, |BM| = t_b$, pak $\triangle BMQ$: $|MQ| = \frac{1}{2}v_a$ je výška trojúhelníku BMC . c) Doplňte

na rovnoběžník $ABDC$.]

4. Otočení

Orientovaný úhel je úhel, u něhož je určeno, které jeho rameno je tzv. počáteční rameno; druhé rameno je jeho koncovým ramenem.

Orientovaný úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku. Při otáčení může polopřímka vykonat libovolný počet otáček. Otáčet můžeme proti směru pohybu hodinových ručiček – v kladném smyslu, nebo ve směru pohybu hodinových otáček – v záporném smyslu. Základní velikost orientovaného úhlu AVB je velikost toho úhlu AVB , který vytvoří polopřímka VA otočením do polopřímky VB v kladném smyslu. Je to vždy číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, příp. $\langle 0, 360^\circ \rangle$.

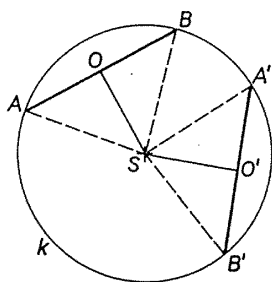
Je dán orientovaný úhel, jehož jedna velikost je φ , a bod S . Otočení neboli rotace je shodné zobrazení $R(S, \varphi)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ ,
2. bodu S bod $S' = S$.

Bod S se nazývá **střed otočení**, orientovaný úhel o velikosti φ **úhel otočení**.

Příklad 1

Je dána kružnice $k(S, r)$. Dokažte, že shodné tětivy $AB, A'B'$ kružnice k mají od středu S stejnou vzdálenost.

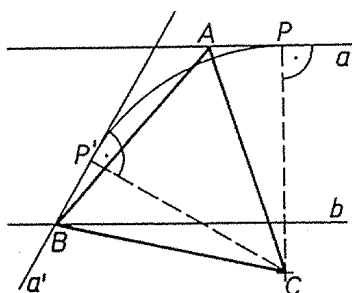


Řešení

Problém se řeší otočením se středem S , kde je trojúhelník $A'B'S$ obrazem trojúhelníku ABS . V tomto otočení je také bod O' obrazem bodu O (O je střed úsečky AB , O' střed úsečky $A'B'$). Proto $|SO'| = |SO|$.

Příklad 2

Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b .



Řešení

Předpokládejme, že je úloha vyřešena. V rovnostranném trojúhelníku ABC je úhel při vrcholu C roven 60° . V otočení, jehož středem je bod C a úhel otočení má velikost $+60^\circ$, je obrazem bodu A bod B , obrazem přímky a přímka a' . Proto $B \in a'$. Ze zadání plyne $B \in b$, tedy $B = a' \cap b$.

Konstrukce

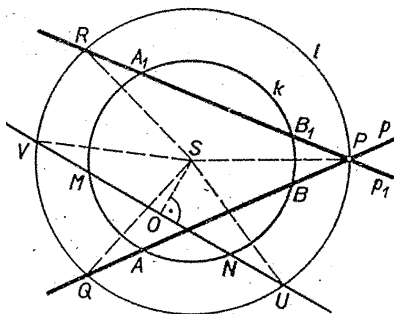
1. a' ; $R(C, 60^\circ): a \rightarrow a'$
2. B ; $B = a' \cap b$
3. A ; $R(C, -60^\circ): B \rightarrow A$
4. $\triangle ABC$

Diskuze

Úloha má dvě řešení.

Příklad 3

Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P ved'te přímku, na které kružnice k vytíná tětivu dané velikosti $d < 2r$.



Řešení

Nechť p je přímka procházející bodem P , na které kružnice k vytíná tětivu AB velikosti d . Její průsečík s kružnicí $l(S, SP)$ označme Q . Sestrojme libovolnou tětivu MN shodnou s AB ; průsečíky přímky MN s kružnicí l označme A, V . Shodné tětivy AB, MN mají od S shodné vzdálenosti; proto přímky p, MN mají od středu S stejné vzdálenosti. Lze tedy převést přímku MN v přímku p rotací určenou úhlem USP .

Konstrukce

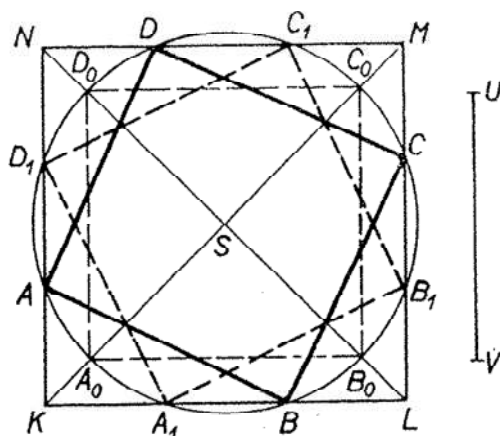
1. $M; M \in k$
2. $N; N \in k, |MN| = d$
3. $l; l(S, SP)$
4. $U; U = MN \cap l$
5. $p; R(S, |\sphericalangle USP|)$

Diskuze

Úloha má jedno, je-li $d = r$, nebo dvě řešení.

Příklad 4

Je dán čtverec $KLMN$ o straně a a úsečka $|UV| = s$. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož každý vrchol leží na jedné straně čtverce $KLMN$ a jehož strana $|AB| = |UV|$.



Řešení

Sestrojíme-li čtverec $A_0B_0C_0D_0$, který má střed shodný se středem čtverce $KLMN$ a strany rovnoběžné s jeho stranami a shodné s UV , existuje otočení se středem S , které zobrazí čtverec $A_0B_0C_0D_0$ ve čtverec $ABCD$. Poloměrem kružnice k , která převede body A_0, B_0, C_0, D_0 v body A, B, C, D ležící na stranách daného čtverce, je

$$|SA_0| = \frac{1}{2}s\sqrt{2}.$$

Konstrukce

6. $A_0; A_0 \in SK, |A_0S| = \frac{1}{2}s\sqrt{2}$
7. $\square A_0B_0C_0D_0; |A_0B_0| = s$
8. $k; k(S, SA_0)$
9. $A; A \in k \cap KL$
10. $B; B \in k \cap LM$
11. $\square ABCD$

Diskuze

Úloha může mít jedno, dvě nebo žádné řešení v závislosti na velikosti strany UV .

Úlohy:

4.1 a) Osa spojnice bodu A s bodem A' , jenž z něho vznikl otočením kolem středu S , jde bodem S .

b) Osa úhlu přímky a s přímkou a' jež z ní vznikla otočením kolem středu S , jde bodem S .

Odůvodněte.

4.2 Sestrojte trojúhelník rovnoramenný, je-li dán jeho vrchol a úhel při vrcholu, tak, aby konce jeho základny ležely na dvou daných čarách (přímkách, kružnicích, ...).

[Otočte kolem daného vrcholu o daný úhel.]

4.3 Jest možno otočením přivést

a) trojúhelník rovnostranný,

b) čtverec

do nové polohy, totožné s původní; kolem kterého středu a o který úhel?

[a) $R(T, k \cdot 120^\circ)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a T je těžiště trojúhelníka. b) $R(S, k \cdot 90^\circ)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a S je střed čtverce.]

4.4 Zobrazte libovolný pětiúhelník $ABCDE$ v otočení $R(S, \varphi)$, je-li

a) S vnitřním bodem pětiúhelníku, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$

b) $S = A$, $\varphi = -120^\circ$,

c) $S \in AB$, $\varphi = 90^\circ$,

d) S leží vně pětiúhelníku, $\varphi = -675^\circ$.

4.5 Do daného rovnoběžníku $KLMN$ vepište čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in KL$, $B \in LM$, $C \in MN$, $D \in KN$.

[Užijte $R(S, \pm 90^\circ)$, kde S je střed čtverce.]

4.6 Jsou dány tři různé rovnoběžky a, b, c a bod $C \in c$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky tak, aby $A \in a$, $B \in b$.

[Užijte $R(C, \pm 60^\circ)$.]

4.7 Je dán bod C , přímka p a kružnice $k(S, 3 \text{ cm})$; $|Sp| = 4 \text{ cm}$, $|Cp| = 2 \text{ cm}$, $|CS| = 5 \text{ cm}$ a body C, S leží v téže polorovině s hraniční přímkou p . Sestrojte všechny

pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABC (úhel při vrcholu C je 90°) tak, aby

$A \in p, B \in k$.

[Užijte $R(C, \pm 90^\circ)$.]

4.8 Je dána kružnice $k(S, r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY

kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60° .

[Zvolte pomocnou tětivu $X'Y'$ délky d kružnice k , sestrojte kružnicové oblouky $X'Y'$ pro obvodový úhel 60° ; užijte otočení se středem S .]

Seznam použitých matematických symbolů a značek

$A, B, \dots$	bod $A, B, \dots$
$a, b, \dots$	přímka $a, b, \dots$
AB	úsečka AB (přímka určená body A, B)
$\overrightarrow{AB}$	orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ (orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B)
(a, b)	rovinný pás a, b (pás ohraničený rovnoběžkami a, b)
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC (trojúhelník s vrcholy A, B, C)
$\square ABCD$	čtverec $ABCD$ (čtverec s vrcholy A, B, C, D)
t_a	těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku
v_a	výška ke straně a trojúhelníku
r	poloměr kružnice
$k(S, r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$A \in p$ ($A \notin p$)	bod A leží (neleží) na přímce p
$A = B$ ($A \neq B$)	bod A je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$a \parallel b$	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$a \perp b$	přímka a je kolmá k přímce b
$a \cap b = \{P\}$	průsečík P přímek a, b
$ AB $	délka úsečky AB
$ Ap $	vzdálenost bodu A od přímky p
$ ab $	vzdálenost rovnoběžných přímek a, b
$ \sphericalangle ABC $	velikost úhlu ABC při vrcholu B
Z	zobrazení Z
Z^{-1}	zobrazení inverzní k zobrazení Z
$Z: X \rightarrow X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$O(o)$	osová souměrnost s osou souměrnosti o
$S(S)$	středová souměrnost se středem souměrnosti S
$T(AB)$	posunutí určené orientovanou úsečkou AB
$R(S, \varphi)$	otočení se středem S a úhlem otočení φ

Seznam literatury

- [1] Čech, E.: Geometrie pro 2. třídu středních škol. Státní nakladatelství v Praze 1949
- [2] Janečka, V.: Geometrie pro vyšší gymnasia – Planimetrie. Praha, I. L. Kober 1902
- [3] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Státní pedagogické nakladatelství 1983
- [4] Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia – Planimetrie. Praha, Prometheus 1993
- [5] Vojtěch, J.: Geometrie pro 4. a 5. třídu škol středních. Praha, Jednota československých matematiků a fyziků 1921