

Goniometrické funkce, rovnice, nerovnice

Oblouková a stupňová míra

Úhly měříme nejčastěji:

- v míře stupňové v jednotkách 1° (stupeň)
- v míře obloukové v jednotkách 1 rad (radián)

Radián je středový úhel, který přísluší na jednotkové kružnici oblouku délky jedné jednotky.

Platí vztahy:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

Pro úhel α ve stupních a x radiánech platí:

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x \qquad x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$

Pozn.:

Stačí si tedy pamatovat alespoň jednu hodnotu ve stupních a radiánech a pak použít trojčlenku, např.:

$\pi \dots\dots\dots 180^\circ$

$x \dots\dots\dots \alpha^\circ$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x \qquad x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$

Orientovaný úhel

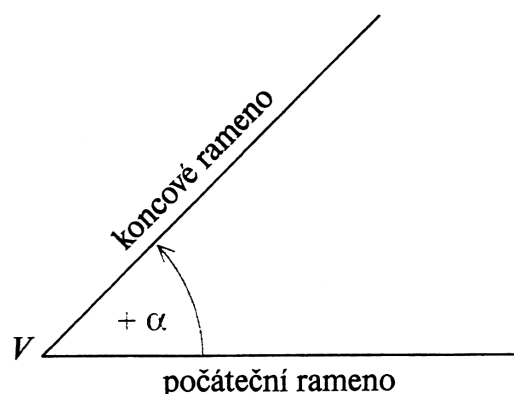
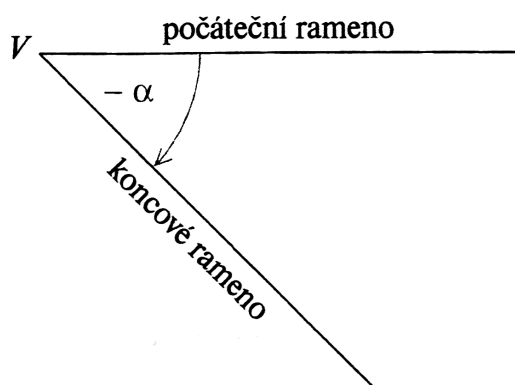
Orientovaným úhlem $\widehat{AVB}$ (zapisujeme $\widehat{AVB}$) nazýváme uspořádanou dvojici polopřímek $\rightarrow VA, \rightarrow VB$, kde $\rightarrow VA$ je počáteční rameno, $\rightarrow VB$ je koncové rameno, bod V je vrchol orientovaného úhlu.

Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ je:

- ve stupňové míře $|\widehat{AVB}| = \alpha + k \cdot 360^\circ$, kde $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$
- v obloukové stupňové míře $|\widehat{AVB}| = \alpha + k \cdot 2\pi$, kde $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

Otáčení ve směru hodinových ručiček, hodnota úhlu je záporná.

Otáčení proti směru hodinových ručiček, hodnota úhlu je kladná.



Goniometrická funkce ostrého úhlu

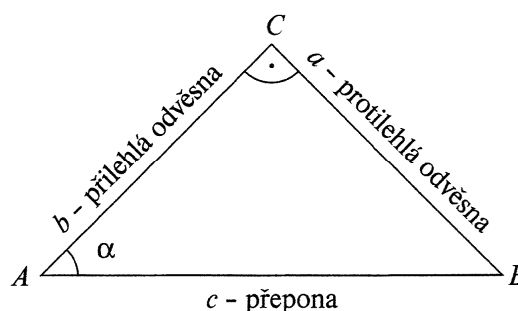
V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou $c = |AB|$, odvěsnami $a = |BC|$ a $b = |AC|$ a vnitřním úhlem α je:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka odvěsny}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$



Tabulka význačných hodnot goniometrických funkcí

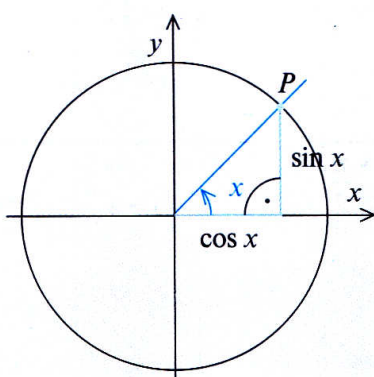
α	$0^\circ/0 \text{ rad}$	$30^\circ/\frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$45^\circ/\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$60^\circ/\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$90^\circ/\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\operatorname{cotg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Goniometrické funkce v jednotkové kružnici

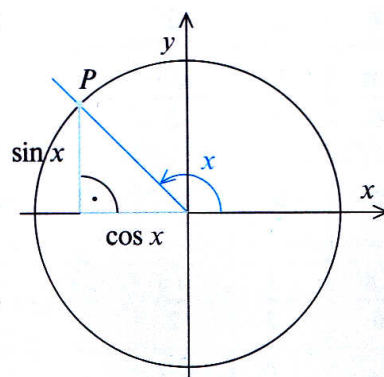
- Funkce $y = \sin x$ je definována jako y-ová souřadnice průsečíku P koncového ramene orientovaného úhlu x s jednotkovou kružnicí.
- Funkce $y = \cos x$ je definována jako x-ová souřadnice průsečíku P koncového ramene orientovaného úhlu x s jednotkovou kružnicí.
- Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je definována jako poměr funkcí $\sin x$ a $\cos x$, tedy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je definována jako poměr funkcí $\cos x$ a $\sin x$, tedy $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Znaménkové hodnoty goniometrických funkcí určíme z definic jednotlivých funkcí:

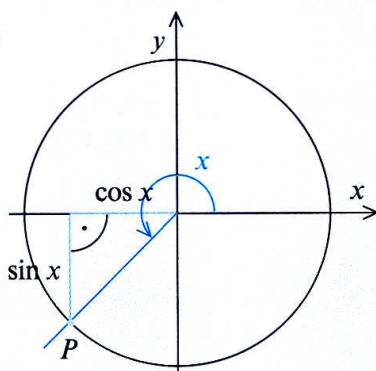
I. kvadrant



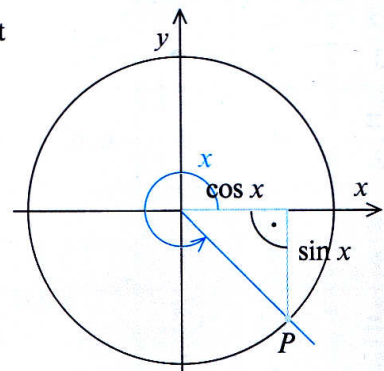
II. kvadrant



III. kvadrant



IV. kvadrant



Tabulka znaménkových hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

Kvadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
I.	+	+	+	+
II.	+	-	-	-
III.	-	-	+	+
IV.	-	+	-	-

