

4.12 Logaritmus čísla

★ 68 Danou rovnost přepište pomocí definice logaritmu:

a) $3^2 = 9$

b) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

c) $9^{\frac{1}{2}} = 3$

★ 69 Vypočítejte:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

c) $\log_7 \sqrt{7}$

e) $\log_8 \sqrt{2}$

g) $\log_{0,25} 4$

b) $\log_5 125$

d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$

f) $\log_5 1$

h) $\log_{0,2} 0,04$

★ 70 Najděte všechna $x \in (0; \infty)$, pro něž platí:

a) $\log_3 x = 4$

c) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$

e) $\log_5 x = 0$

g) $\log_{17} x = 1$

b) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

d) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$

h) $\log x = -\frac{3}{5}$

★ 71 Najděte všechna kladná reálná čísla a tak, aby platilo:

a) $\log_a 27 = 3$

c) $\log_a \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\log_a 4 = \frac{1}{4}$

g) $\log_a 8 = 6$

b) $\log_a \frac{1}{16} = 4$

d) $\log_a 5 = -1$

f) $\log_a \sqrt{8} = 3$

h) $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$

72 Užitím pravidel pro počítání s logaritmy upravte a potom rozhodněte, zda dané číslo x je kladné, nebo záporné. Je-li číslo x kladné, rozhodněte dále, zda je menší, nebo větší než jedna.

★ a) $x_1 = 2 \log 4 + \log 3 - \log 6$

c) $x_3 = 2 \log_{0,2} 4 + \log_{0,2} 3 - \log_{0,2} 6$

★ b) $x_2 = \log_6 12 - \log_6 \frac{1}{12} - 2$

d) $x_4 = \ln 4 + \ln \frac{1}{3} - 2 \left(\ln 2 + \ln \frac{1}{4} \right)$

73 Vypočítejte:

a) $\log_2 \log_2 16$

★ d) $3 \log_2 \frac{5}{3} - 2 \log_2 \frac{10}{9} + \log_2 \frac{1}{30}$

★ b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$

e) $\log^2 2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 - \log 1$

c) $\log_5 \frac{1}{25} - (\log_{\frac{1}{3}} 9)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$

f) $2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5}$

74 Vypočítejte x , víte-li, že a, b, c jsou kladná reálná čísla (odlogaritmujte):

a) $\log x = 0,5 \log a + 3 \log b - 2 \log c$

★ b) $\log x = \frac{1}{2} \log a - \log b - \frac{3}{5} \log c + 1$

★ c) $\log_2 x = 3 \log_2 a + 2 \log_2 b + 4$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} (\log_{\frac{1}{2}} a + 3 \log_{\frac{1}{2}} b) - 2 + \log_{\frac{1}{2}} c$

75 Dané výrazy vyjádřete pomocí $\log a, \log b, \log c$, kde a, b, c jsou daná kladná reálná čísla (zlogaritmujte):

★ a) $\log \frac{a^2 b^3}{100 \sqrt{c}}$

★ b) $\log \sqrt{\frac{10a}{bc}}$

c) $\log \frac{(a+b)^2}{c}$

5.2 Logaritmické rovnice

9 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- ★ a) $\log_2(x+1) = 3$ ★ e) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$
★ b) $4 \log_3(2x-1) = 12$ f) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3(1+20 \log_2 x) = -2$
c) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$ g) $\log_2[14+2 \log_7(1+2 \log_{\frac{1}{2}} x)] = 4$
d) $\log_4(5x-4) = 2$ h) $\log_9\{3 \log_2[1+\log_3(1-2 \log_3 x)]\} = 0,5$

10 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- ★ a) $\log_5(x^2+2x) = \log_5(-3x)$ c) $\log_{0,1}(x^2-5x) = \log_{0,1}(5x+11)$
b) $\log x^2 = \log(4-x^2)$ d) $\log_2(x^2-x) = \log_2 x$

11 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- ★ a) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$
b) $\frac{\log_3 x}{1+\log_3 2} = 2$
★ c) $\log_6(x+1) + \log_6 x = 1$
d) $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3$
e) $\log(x+3) = \log x + \log 3$
★ f) $\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1$
g) $\log x^5 - \log x^4 + \log x^3 = 12$
h) $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{x^2} - \log x^3 + \frac{11}{2} = \frac{\log x^2}{1+\log 10}$
i) $3 \log 2x^2 + 2 \log 3x^3 = 5 \log x + 2 \log 6x^3$
j) $0,5(3 \log 5 - 1 - \log x) = 2 - \log 5$
★ k) $\log_4(3x+2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$
l) $1 + \log_3(5-x) - \log_3(2x-1) = \log_3(2x-1)$

12 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- a) $\log_2 \frac{3-x}{x+3} = -2$ c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x+14} = \frac{\log 125}{\log 5}$
★ b) $\log_3 \frac{6x-2}{x-3} = 2$ d) $\log_7 \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

13 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- ★ a) $\frac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$ c) $\frac{2 \log 3x}{\log(2-7x)} = 1$
b) $\frac{\log_5(x-\frac{1}{4})}{\log_5(x+\frac{7}{2})} = -1$ d) $\frac{\log x}{\log(x-2)} = \frac{\log 9}{\log 3}$

14 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- ★ a) $\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0$
b) $4 \log_9 x (\log_9 x - 1) = 2 + 3 \log_9 x$
★ c) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + 5 \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 6$
d) $4 \log_3(2x+1) + \log_3 \sqrt{2x+1} = \frac{3}{2} \log_3^2(2x+1) - 6$

16 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

★ a) $\log_{\frac{1}{7}} x + \frac{1}{\log_{\frac{1}{7}} x} = -2$ c) $\log_3^2(x+1) + \frac{1}{\log_3^2(x+1)} = \frac{17}{4}$
b) $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$ d) $\log_4^2 x^3 - \frac{4}{\log_4^2 x^2} = 8$

17 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

★ a) $\log 100x + \log 10x = 7$ c) $\log 100x + \log 10x^2 = 7$
b) $\log 100x + \log^2 10x = 7$ d) $\log 100x^2 + \log^2 10x^2 = 7$

18 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{3}{2} \log \frac{x^2}{10} + \log \frac{100}{x^3} - \log \frac{\sqrt{10}}{x} = -2$
b) $\frac{\log_2 x - 2}{\log_2 \frac{x}{4}} - 2 \log_2 \sqrt{x} = \log_2^2 x + 1$
c) $\frac{\log_2 2x}{\log_2 8x} + \log_2 \frac{x}{8} = \frac{2}{\log_2 4 - \log_2 0,5}$
d) $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{2}} 4x = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 16x}{\log_{\frac{1}{2}} 8} + \log_{\frac{1}{2}} 4$
e) $\frac{\log_3^2 9x}{\log_3 81x^2} = \frac{3}{2}$
f) $\frac{\log \frac{x}{10}}{\log^2 \sqrt{x}} + 1 = \log x$

19 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

★ a) $x^{\log x} = 100x$ c) $1000x^2 = x^{\log x}$ e) $x^{\log_7 x^2} = 49x^3$
b) $x^{\log x+2} = 100x$ d) $27x^2 = x^{\log_3 x}$ f) $(\sqrt{x})^{\log_2 x+1} = 2$

20 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_2 x + \log_4 8 = \log_8 16$ c) $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \frac{3}{4}$
★ b) $\log_9 x + \log_3 x = 6$ d) $\log_x 2 + \log_{4x} 8 = 2 \log_{4x} 16$

Výsledky:

4.12 Logaritmus čísla

- 68 a) $\log_3 9 = 2$; b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$.
69 a) -2 ; b) 3 ; c) $\frac{1}{2}$; d) -8 ; e) $\frac{1}{6}$; f) 0 ; g) -1 ; h) 2 .
70 a) 81 ; b) 4 ; c) 5 ; d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; e) 1 ; f) $\frac{1}{8}$; g) 17 ; h) $\sqrt[5]{0,001}$.
71 a) $a = 3$; b) $a = \frac{1}{2}$; c) $a = \frac{1}{27}$; d) $a = \frac{1}{5}$; e) $a = 256$; f) $a = \sqrt{2}$; g) $a = \sqrt{2}$; h) $a = 10$.
72 a) $x_1 = \log 8, 0 < x_1 < 1$; b) $x_2 = \log_6 4, 0 < x_2 < 1$; c) $x_3 = \log_{\frac{1}{5}} 8, x_3 < 0$; d) $x_4 = \ln \frac{16}{3}, x_4 > 1$.
73 a) 2 ; b) -1 ; c) -10 ; d) -3 ; e) 1 ; f) 8 .
74 a) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot b^3}{c^2}$; b) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot 10}{b \cdot \sqrt[5]{c^3}}$; c) $x = a^3 \cdot b^2 \cdot 16$; d) $x = 4 \cdot \sqrt[4]{ab^3} \cdot c$.
75 a) $2 \log a + 3 \log b - 2 - \frac{1}{2} \log c$; b) $\frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c + 1)$; c) $2 \log(a + b) - \log c$.

5.2 Logaritmické rovnice

- 9 Užijte definici logaritmu čísla.
a) $\{7\}$; b) $\{14\}$; c) $\{-2\}$; d) $\{4\}$; e) $\{\frac{1}{8}\}$; f) $\{16\}$; g) $\{\frac{1}{8}\}$; h) $\{\frac{1}{3}\}$.
10 Rovnají-li se logaritmy o stejném základu, potom se rovnají i logaritmované výrazy.
a) $\{-5\}$; b) $\{\pm\sqrt{2}\}$; c) $\{-1; 11\}$; d) $\{2\}$.
11 Užijte pravidla pro počítání s logaritmy.
a) $\{100\}$; b) $\{36\}$; c) $\{2\}$; d) $\{1\}$; e) $\{\frac{3}{2}\}$; f) $\{2\}$; g) $\{1000\}$; h) $\{10\}$; i) $\{\frac{1}{2}\}$; j) $\{\frac{1}{32}\}$; k) $\{2\}$; l) $\{2\}$.
12 Užijte definici logaritmu, viz úloha 9. a) $\{\frac{9}{5}\}$; b) $\{\frac{25}{3}\}$; c) $\{2\}$; d) $\{\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$.
13 V rovnici odstraňte zlomek, pak užijte vztah $k \cdot \log x = \log x^k$, dále viz úlohu 10.
a) $\{11\}$; b) $\{\frac{1}{2}\}$; c) $\{\frac{2}{9}\}$; d) $\{4\}$.
14 Substituce $\log_a x = t$, dostanete kvadratickou rovnici.
a) $\{2; \frac{1}{8}\}$; b) $\{81; \frac{\sqrt{3}}{3}\}$; c) $\{-\frac{1}{2}; 63\}$; d) $\{-\frac{1}{3}; 40\}$.
15 Substituce $\log x = t$, dostanete rovnici s neznámou ve jmenovateli. a) $\{100\}$ b) $\{\frac{1}{10}\}$.
16 a), c) Substituce, úprava, kvadratická rovnice.
b), d) Pravidlo $\log x^k = k \cdot \log x$, potom substituce, úprava, kvadratická rovnice.
a) $\{7\}$; b) $\{10; \frac{\sqrt[3]{10}}{100}\}$; c) $\{-\frac{8}{9}; 8; -1 + \sqrt{3}; -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\}$; d) $\{4; \frac{1}{4}\}$.
17 Dejte si pozor, kde je napsáno na druhou. Užijte pravidlo pro logaritmus součinu.
a) $\{100\}$; b) $\{10^{-4}; 10\}$; c) $\{10\sqrt[3]{10}\}$; d) $\{\pm 0,01; \pm\sqrt{10}\}$.
18 Pravidla pro počítání s logaritmy. Složitější úlohy.
a) $\{\frac{1}{100}\}$; b) $\{\frac{1}{2}; 1\}$; c) $\{8; \frac{\sqrt[3]{4}}{16}\}$; d) $\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\}$; e) $\{3\}$; f) $\{0,01; 10; 100\}$.
19 Logaritmujte. a) $x^{\log x} = 100x \Rightarrow \log x^{\log x} = \log 100x \Rightarrow \log x \cdot \log x = \log 100 + \log x$, potom substituce $\log x = a$.
a) $\{0,1; 100\}$; b) $\{0,01; 10\}$; c) $\{0,1; 1000\}$; d) $\{\frac{1}{3}; 27\}$; e) $\{\frac{\sqrt{7}}{7}; 49\}$; f) $\{\frac{1}{4}; 2\}$.
20 Užijte vzorec pro změnu základu logaritmu $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
a) $\{\frac{\sqrt[6]{32}}{2}\}$; b) $\{81\}$; c) $\{2\}$; d) $\{\sqrt{2}\}$.
21 a) $x = 7 - y$, dosadit o druhé rovnice. $[5; 2], [2; 5]$.
b) Ze druhé rovnice plyne $x \cdot y = 2^3 \Rightarrow x = \frac{8}{y}$, dosadit do první rovnice. $[4; 2], [2; 4]$.
c) Převedte všechny logaritmy na základ 2, potom $\log_2 x = a, \log_2 y = b$. $[2; 4]$.
d) Nejdříve upravte pravé strany obou rovnic, potom užijte definice logaritmu. $[2; 0]$.