

5 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

5.1 Exponenciální rovnice

1 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$

c) $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

d) $0,25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$

e) $2 \cdot 0,5^{x^2 + \frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$

f) $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$

g) $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$

h) $\frac{3^x}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = 4,5$

2 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^x + 3^{x+1} = 108$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

c) $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$

d) $\frac{4}{5} \cdot 5^0 + 5^{-1} - 25^x + 20 \cdot 25^{x-1} = 0$

e) $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$

f) $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$

3 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

b) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$

c) $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$

d) $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$

e) $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

f) $5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) = 3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50$

4 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$

b) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$

c) $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

d) $3^x + \frac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \frac{9^x}{9}$

5 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

b) $16^x = 8 \cdot 4^x + 2 \cdot 8^x$

6 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^x = 10$

b) $5^{x+1} = 4$

c) $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$

d) $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$

7 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $6 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} = 82$

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$

c) $2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1}$

d) $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$

Výsledky:

5.1 Exponenciální rovnice

1 Převeďte na stejný základ.

a) $\{2\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-2\}$; d) $\{-\frac{1}{2}\}$; e) $\{-2; -\frac{2}{3}\}$; f) $\{2\}$; g) $\{2\}$; h) $\{2 + \sqrt{3}\}$.

2 Vytýkejte. a) $3^x + 3^x \cdot 3^1 = 108 \Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3^1) = 108 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$;

b) $\{-2\}$; c) $\{2\}$; d) $\{\frac{1}{2}\}$; e) $\{-1\}$; f) $\{2\}$.

3 Substituce na kvadratickou rovnici.

a) $\{\frac{1}{2}; 1\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-2; 0\}$; d) $\{0; 1\}$; e) $\{-2\}$; f) $\{1\}$.

4 a) Vytkněte $3^x(1 + 3) = 4^x(7 - 4)$, potom dělte $\frac{3^x}{4^x} = \frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{3}{4})^x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 1$;

b) $\{3\}$; c) $\{\frac{3}{2}\}$; d) $\{2\}$.

5 a) Upravte $2^x \cdot 2^x + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot 3^x \cdot 3^x$, potom dělte součinem $2^x \cdot 3^x$ a dostanete $(\frac{2}{3})^x + 1 = 2 \cdot (\frac{3}{2})^x$. Po substituci kvadratická rovnice. $x = 0$;

b) upravit, dělit součinem $4^x \cdot 2^x$; $x = 2$.

6 Logaritmujte.

a) $x = \log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} \doteq 2,10$; b) $x = \log_5 \frac{4}{5} = \frac{\log \frac{4}{5}}{\log 5} \doteq -0,14$;

c) $x = \log_6 18 = \frac{\log 18}{\log 6} \doteq 1,61$; d) $x = \log_{\frac{16}{245}} 16 = \frac{\log 16}{\log 16 - \log 245} \doteq -1,02$.

7 a) $\{\log_7 \frac{2}{49}\}$; b) $\{\log_3 2; -1\}$; c) $\{\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{3}\}$; d) $\{\log_{\frac{2}{3}} 2; -1\}$.