1. Vyjádřete v algebraickém tvaru:

   a) $(-2-4\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-(1-2\mathrm{i})$

   b) $(3+2\mathrm{i})-(3\mathrm{i}-1)^2+\dfrac{26+13\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$

2. Vyjádřete v goniometrickém tvaru:

   a) $2-2\mathrm{i}$ b) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ c) -1

3. Číslo $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$ má následující goniometrický tvar:

   a) $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   b) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

   c) $\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

   d) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

4. Číslo $\frac{5}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$ má následující goniometrický tvar:

   a) $\frac{5}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   b) $\frac{5}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

   c) $\frac{10}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   d) $\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

5. Algebraický tvar čísla $4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ je:

   a) $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

   b) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

   c) $-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

   d) $2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

6. Vyjádřete v algebraickém tvaru: $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

7. Vypočtěte:

   a) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{10}$ b) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^{8}$

8. Vypočtěte:

   a) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$ b) $\sqrt[5]{1}$ c) $\sqrt[3]{64\mathrm{i}}$ d) $\sqrt[4]{16}$

9. Řešte rovnice v oboru $\mathbf{C}$:
   a) $5x^2 - 6x + 2 = 0$
   b) $-x^2 - 6\mathrm{i}x + 8 = 0$

10. Řešte rovnice v oboru $\mathbf{C}$:
   a) $x^2 - 2(3-\mathrm{i})x + 7 - 6\mathrm{i} = 0$
   b) $x^3 + 8 = 0$

11. Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je $x_1 = 4 + 3\mathrm{i}$.

Řešení:

1. a) Odstraníš závorky: $1 - \mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 2 - 1 + 2\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$
   b) Odstraníš závorky a rozšíříš zlomek:
   $3 + 2\mathrm{i} + 9 + 6\mathrm{i} - 1 + \dfrac{13(2+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = 11 + 8\mathrm{i} + 13\dfrac{7-4\mathrm{i}}{13} = 18 + 4\mathrm{i}$

2. a) Zjistíš absolutní hodnotu komplexního čísla $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ a argument komplexního čísla $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$. Goniometrický tvar je $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
   b) Zjistíš absolutní hodnotu komplexního čísla $\sqrt{12+4} = 4$ a argument komplexního čísla $\varphi = \dfrac{7\pi}{6}$. Goniometrický tvar je $4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.
   c) Zjistíš absolutní hodnotu komplexního čísla $\sqrt{1+0} = 1$ a argument komplexního čísla $\varphi = \pi$. Goniometrický tvar je $\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$.

3. Správně je c). Rozšíříš zlomek: $\dfrac{(3-\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})} = \dfrac{-10\mathrm{i}}{10} = -\mathrm{i}$. Zjistíš absolutní hodnotu komplexního čísla $\sqrt{0+1} = 1$ a argument komplexního čísla $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. Goniometrický tvar je $\cos\dfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}$.

4. Správně je b). Zjistíš absolutní hodnotu komplexního čísla $\sqrt{\dfrac{25}{36}+\dfrac{75}{36}} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ a argument komplexního čísla $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$. Goniometrický tvar je $\dfrac{5}{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

5. Správně je d). Stačí spočítat hodnoty goniometrických funkcí:
$$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$$

6. Stačí spočítat hodnoty goniometrických funkcí:
$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

7. a) Rozšíříš zlomek uvnitř závorky: $\left[\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\right]^{10} = \left(\dfrac{-2\mathrm{i}}{2}\right)^{10} = \mathrm{i}^{10} = -1$
   b) Výraz můžeš zapsat takto: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 (1+\mathrm{i})^8 = \dfrac{1}{16}\left[(1+\mathrm{i})^2\right]^4 = \dfrac{1}{16}(2\mathrm{i})^4 = 1$

8. a) Označíš neznámý výsledek $\sqrt[3]{-\mathrm{i}} = z$, kde $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Umocníš:

$$\sqrt[3]{-\mathrm{i}} = z \Rightarrow -\mathrm{i} = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi) \Rightarrow \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi)$$

Proto platí: $|z| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \{0; 1; 2\}$

$$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}$$
$$z_2 = \left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$$
$$z_3 = \left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$$

b) Postupuješ naprosto stejně jako v úloze a) a dostáváš:

$$z_1 = (\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 1$$
$$z_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$z_3 = \left(\cos\frac{4\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$z_4 = \left(\cos\frac{6\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$
$$z_5 = \left(\cos\frac{8\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{5}\right)$$

c) Postupuješ naprosto stejně jako v úloze a) a dostáváš:

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$$
$$z_2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$$
$$z_3 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -4\mathrm{i}$$

d) Postupuješ naprosto stejně jako v úloze a) a dostáváš:

$$z_1 = 2(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 2$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i}$$
$$z_3 = 2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2$$
$$z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2\mathrm{i}$$

9. a) Hledáš kořeny kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{10} = \frac{3}{5} \pm \frac{\mathrm{i}}{5}$$

b) $x_{1,2} = \dfrac{-6\mathrm{i} \pm \sqrt{-36 + 32}}{-2} \Rightarrow x_1 = 2\mathrm{i},\ x_2 = 4\mathrm{i}$

10. a) $x_{1,2} = \dfrac{2(3-\mathrm{i}) \pm \sqrt{4(3-\mathrm{i})^2 - 4(7-6\mathrm{i})}}{2} = \dfrac{2(3-\mathrm{i}) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x_1 = 4 - \mathrm{i},\ x_2 = 2 - \mathrm{i}$

b) Postupuješ stejně jako v úloze 8:

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$
$$x_2 = 2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2$$
$$x_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

11. Má-li kvadratická rovnice s reálnými koeficienty jeden kořen $x_1 = 4 + 3\mathrm{i}$, pak druhým jejím kořenem je číslo komplexní sdružené k číslu x_1, tedy $x_2 = 4 - 3\mathrm{i}$. Čísla x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.
Dosadíš a po úpravě dostaneš:

$$[x - (4 + 3\mathrm{i})][x - (4 - 3\mathrm{i})] = 0$$

$$x^2 - 8x + 25 = 0$$